BAC **1996**

SERIES: MTE-TSEco-STG

EXERCICE 1 : (4points)

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant

$$\begin{cases} \log_x^e + \log_y^e = \dfrac{7}{3} \\ \ln(x\,y) = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

EXERCICE 2 : (4points)

Soit *f* la fonction définie sur $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\tan(x)}$

1)- Étudier le signe de $f(x)$ sur $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ et calculer le réel $I_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$.

Interpréter I_1 comme l'aire d'un domaine à préciser.

2)- Soit *g* la fonction définie sur $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ par : $g(x) = f(x) - x$

Calculer $g'(x)$ et en déduire $I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan(x)dx$.

PROBLÈME : (12 points)

Partie I :

1) Déterminer la solution de l'équation différentielle : $y'+2y = 0$ qui prend la Valeur $\frac{1}{4}$ au point 0.

2) Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, par : $f(x) = \frac{1}{4}e^{-2x}$. Construire la courbe représentative ($\mathcal{C}$) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (Unité graphique : 4cm).

3) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un sous–ensemble de $\mathbb{R}$ que l'on précisera. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f ; donner son tableau de variation et construire sa courbe représentative ($\mathcal{C}'$) dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

4) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ et calculer l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = \frac{1}{4}$; $x = \frac{e}{4}$; $y = 0$ et la courbe ($\mathcal{C}'$)

Partie II :

1) Soit $(U_n)_{n \in IN}$ une suite arithmétique de raison r et (V_n) la suite numérique définie par : $V_n = f(U_n)$ pour tout entier naturel n.

   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera, en fonction de r, la raison q.

   b) Discuter suivant les valeurs de r, la limite de la suite (U_n).

   c) Calculer en fonction de U_0, r et n la somme $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$ et déterminer la limite de (S_n) ;

2) Calculer la limite de la suite $(F_n)_{n \in IN}$ définie par :

$$F_n = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots\ldots\ldots + f(n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

3) Soit (W_n) la suite définie par : $W_n = \int_0^n f(x)dx$

Exprimer W_n en fonction de n et montrer que (W_n) converge vers une limite que l'on déterminera.