EXERCICE 1 : (5 points)

1- Simplifier l'expression : $E = \frac{e^{2x+1}}{e^{2x-1}}$

2- a) On considère la suite numérique (U_n) définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N}\quad U_n = e^{2n-1}$.

b) Calculer U_0, U_1, U_2, U_3, U_{n+1}.

c) Démontrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

d) Exprimer en fonction de n, la somme $S_n = \sum_{i=0}^{n} U_i = U_0 + U_1 + ... + U_n$. Calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

e) Trouver la valeur minimum de n telle que $S_n \geq 10$.

NB : On donne : e = 2,7 ; $e^2 = 7{,}3$; $e^3 = 19{,}7$; ln171 = 5,14.

3- Soit (V_n) la suite numérique définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N}\ V_n = \ln(U_n)$.

a) Exprimer la somme $S_n' = V_0 + V_1 + ... + V_n$ en fonction de n.

b) Exprimer le produit $P_n = U_0 \times U_1 \times .... \times U_n$ en fonction de n.

EXERCICE 2 : (5 points)

1. a°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $z^2 - (2+\sqrt{3})z + 2 + \sqrt{3} = 0$

On notera z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive.

b°) On considère les nombres complexes : $u = z_1 + 1$ et $v = u^2 - 2$

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$ d'unité graphique 2 cm, placer les points A ; B ; C et D d'affixes respectives 1 ; z_1 ; u et v.

c°) Démontrer que les points A, B et D sont alignés.

2- On considère la fonction Q définie sur par $Q(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$.

a°) Calculer Q (1) et Q (– 1). En déduire qu'il existe un polynôme du second degré $Q_1(x)$ tel que, pour tout nombre réel x, $Q(x) = (x-1)(x+1)Q_1(x)$.

b°) Factoriser Q (x) . Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation Q (x) = 0.

c°) Résoudre l'équation $x \in \mathbb{R}$: $6 - e^x - 7e^{2x} + e^{3x} = 0$.

3- f est une fonction définie sur l'intervalle] -∞ ; - 1[par : $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 1}{x+1}$

a) Déterminer les réels a, b, c et d tels que pour $x \neq 1$ $f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x+1}$.

b) Calculer l'intégrale : $I = \int_{-3}^{-2} f(x)\,dx$.

c) Calculer les intégrales : $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x+\cos x)\,dx$; $K=\int_0^{2} e^{x}\,dx$; $L=\int_1^{2} x e^{x}\,dx$

<u>PROBLEME</u> : (10 points)

<u>Partie A</u>

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)= e^x + x - 5$

1- Etudier le sens de variation de g. (On ne demande pas de déterminer les limites de g, ni de construire sa courbe représentative).

2- a) Calculer g (0) et g (2).

b) Démontrer que l'équation : x réel, $e^x + x - 5 = 0$ admet une solution α et une seule.

c) Justifier l'encadrement $1{,}30 < \alpha < 1{,}31$.

<u>Partie B</u>

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]-\infty\,;5[$ par : $f(x)= \ln(5-x)$

1- Etudier le sens de variation de f . Préciser les limites de f en 5 et en $-\infty$.

2- Prouver l'égalité : $f(\alpha)=\alpha$.

3- a) Démontrer que pour tout x de l'intervalle [0 ; 3] on a : $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$.

b) En déduire que pour tout x de l'intervalle [0 ; 3] on a :

$$|f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$$

c) Démontrer que si $0\leq x\leq 3$; alors $0 \leq f(x) \leq 3$.

4- Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; i ; j) d'unité graphique 1 cm, on désigne par (C) la représentation graphique de la fonction f .

a) Tracer la courbe (C), hachurer la partie du plan formée des points de coordonnées (x ; y) tels que : $\begin{cases}\alpha\leq x\leq 4\\ 0\leq y\leq f(x)\end{cases}$ On notera (S) cette partie.

b) En remarquant pour $x \neq 5$: $\frac{x}{x-5}=1+\frac{5}{x-5}$ justifier que : $\int_\alpha^4 \frac{x}{x-5}\,dx = 4-6\alpha$.

c) Prouver que l'aire A de la partie (S) est en cm^2, donnée par :
$A = -\alpha^2 + 6\alpha - 4$. (On pourra utiliser une intégration par parties).