Exercice 1 : ………………………………………………(6 points)

1-/ On définit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme $U_0 = 1$ et la relation de récurrence $\forall n \in IN$, $U_{n+1} = \frac{U_n + 8}{2U_n + 1}$. Calculer U_1, U_2 , U_3.

2-/ Soit la fonction h définie sur $]-\frac{1}{2}\,;+\infty[$ par $h(x) = \frac{x+8}{2x+1}$ et $(\mathscr{H})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

a) Tracer dans ce repère la courbe $(\mathscr{H})$ et la droite (Δ) d'équation y = x.

b) Construire à l'aide de $(\mathscr{H})$ et de (Δ) les points de l'axe $(O;\vec{i})$ d'abscisses respectives U_0 , U_1, U_2 , U_3.

c) Que peut-on prévoir quant à la convergence de la suite (U_n) ?

3-/ Soit $F(x) = \int_0^x e^{3t}\sin(2t)dt$

Prouver en effectuant deux intégrations par parties successives que $F(x) = G(x) - \frac{9}{4}F(x)$ où G est une fonction que l'on déterminera. En déduire F(x), indiquer une vérification.

Exercice 2 : ………………………………………………(4 points)

1-/ Résoudre le système $(x\,;y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ $\begin{cases} 5e^{-x} - \frac{3}{e^y} = 3 \\ \frac{7}{e^x} + 6e^{-y} = 11 \end{cases}$

2-/ a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $e^{2x} + 9e^{-2x} - 10 = 0$.

3-/ Pour tout réel X on pose $P(X) = X^2 + 2X - 3 = 0$

a) Factoriser P(X)

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations : $e^{2x} + 2e^x - 3 > 0$; $4^x + 2^{x+1} \leq 3$.

4-/ n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2, on définit sur $[0\,;+\infty[$ les fonctions *u* et *f* par $u(x) = \sqrt[n]{x}$ *et* $f(x) = x^n$.

Démontrer que $f(u(x)) = x$ *et que* $u(f(x)) = x$.

5-/ Calculer l'intégrale : $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\tan 2x}{\cos^2 2x}\right)dx$

PROBLÈME : ……………………………………………(10 points)

A-/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4\,\dfrac{e^x}{e^x+1}$. On désigne ($\mathcal{C}$) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,\right)$ d'unité 2cm.

1°) Déterminer les limites de f quand $x \to +\infty \quad et \quad quand \quad x \to -\infty$. En déduire les droites asymptotes à ($\mathcal{C}$).

2°) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

3°) Démontrer que le point d'intersection A de ($\mathcal{C}$) et de l'axe des ordonnées est centre de symétrie pour ($\mathcal{C}$).

4°) Donner une équation de la tangente (T) à ($\mathcal{C}$) au point A.

5°) Tracer dans le repère, les asymptotes, (T) et ($\mathcal{C}$).

B-/

1°) Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule pour x = 0 et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\,\right)$ d'unité 2cm.

Quel est le sens de variation de F ?

2°) Expliciter F(x), pour tout réel x

3°) a) Déterminer les limites de F quand $x \to +\infty \quad et \quad quand \quad x \to -\infty$.

b) En déduire l'existence d'une asymptote horizontale à (Γ) .
Donner son équation.

c) Démontrer que la droite (Δ) d'équation : y = 4x – 4ln2 est asymptote à (Γ). On pourra remarquer que $e^x + 1 = e^x\,(1 + e^{-x})$.

4°) Résumer les résultats précédents dans un tableau de variations.

5°) Tracer (Γ).

C-/

1°) Calculer, en cm^2, l'aire A du domaine délimité par la courbe ($\mathcal{C}$), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = ln3.

2°) En déduire, en cm^2, l'aire A' du domaine délimité par la courbe ($\mathcal{C}$), la droite d'équation y = 4 et les droites d'équations x = 0 et x = ln3.