SERIES: MTE-TSEco-STG

Exercice 1 : (5 points)

1°/ a.) Ecrire plus simplement les réels :

$$A = e^{2\ln 5} \; ; \quad B = e^{-\ln\frac{1}{2}} \; ; \quad C = \ln(e^{\sqrt{2}} \times e^{\sqrt{8}}) .$$ *(1,5pt)*

b.) Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_2^4 \left(\frac{x^2+3x-1}{x-1}\right)dx \; ; \; J = \int_0^2 (2x-1)e^{x^2-x}dx \; ; \; K = \int_2^3 \left(\frac{3-4x}{1-3x+2x^2}\right)dx .$$ *(1,5pt)*

2°/ Soit la suite numérique (U_n) définie par $U_n = e^{2n+1}$ avec n un entier naturel.

a.) Quelle est la nature de la suite (U_n) ? Préciser sa raison et son premier terme. *(1pt)*

b.) On désigne par S_n la somme : $U_0 + U_1 + U_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + U_n$:

– Exprimer S_n en fonction de n. *(0,5pt)*

– Calculer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$. *(0,5pt).*

Exercice 2 : (4 points)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère les nombres

$$z_1 = \frac{2\sqrt{3} + 11 + (11\sqrt{3} - 2)i}{2 + 11i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{4 + 2i}{3 - i}$$

1°/ a.) Ecrire z_1 et z_2 sous forme algébrique. *(1pt)*
b.) Déterminer le module et un argument de chacun des complexes z_1 et z_2. *(1pt)*

2°/ On pose $Z = \dfrac{z_2}{z_1}$.

a.) Ecrire Z sous forme trigonométrique puis algébrique. *(0,5pt)*

b.) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{5\pi}{12}$. *(0,5pt)*

c.) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\sqrt{6} - \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} + \sqrt{2})\sin x = 2$. *(1pt)* **TSVP** 🕮

Problème : [*11 points*]

A–/ 1°/ On considère la fonction f définie sur $]-1\ ;+\infty[$ par

$f(x) = ax + b + 3\ln(x+1)$ où a et b sont deux réels.

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$. Déterminer a et b sachant que $(\mathcal{C})$ passe par le point A(0 ; 5) et admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{1}{2}$. *(1pt)*

2°/ Dans la suite on considère la fonction f définie sur $]-1\ ;+\infty[$ par

$$f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x+1).$$

Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f. Dresser le tableau des variations.
Préciser la valeur exacte du maximum de f. *(1,5pt)*

3°/ Tracer $(\mathcal{C})$ et ses asymptotes éventuelles dans le plan muni du repère orthonormé $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$ (unité graphique 2 cm). *(1,5pt)*

4°/ a.) Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que

$\alpha < 0 < \beta$ et $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. *(0,5pt)*

b.) Calculer $f(-0{,}9)$, $f(-0{,}8)$, $f(5{,}2)$ et $f(5{,}3)$ en déduire un encadrement d'amplitude

10^{-1} de α et de β. *(1pt)*

c.) En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-1\ ;+\infty[$. *(1pt)*

5°/ Soit g la fonction définie sur par $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$.

Calculer $g'(x)$, en déduire la primitive de f s'annulant pour $x = 0$. *(1pt)*

B-// Une entreprise a une capacité de production de 5000 ouvrages par jour.

Une étude a montré que le coût marginal de production de cette entreprise peut être modélisé par $f(q)$ (en milliers de francs) où q désigne la quantité d'ouvrages imprimés

(en milliers d'unités). On rappelle que le coût marginal est la dérivée du coût de production.

1°/ a.) Calculer $\int_0^5 f(q)dq$. *(1pt)*

b.) En déduire le coût total (en francs) de production de 5000 ouvrages. *(1pt)*

2°/ L'imprimeur compte réaliser en deux jours une commande de 8000 ouvrages.
Il hésite entre deux possibilités suivantes :

❶ 5000 ouvrages le premier jour et 3000 ouvrages le second

❷ 4000 ouvrages pendant deux jours.

Quelle est l'option la plus rentable ? *(1,5pt)*