EXERCICE 1 : (5 points)

1 a) Linéariser : A = $\cos^2 x + \sin^3 x$; B = $\cos^4 x$

b) En déduire : $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} A\,dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} B\,dx$

2 Soit f l'application, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$f(z) = z^4 - \sqrt{2}\, z^3 - 4\sqrt{2}\, z - 16$.

a) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout nombre complexe z, on ait :

$f(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b)$

b) En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$.

c) Déterminer les réels r et θ tels que [r ; θ] = 1 + i.

EXERCICE 2 : (5 points)

1- (Un) est une suite géométrique de raison 3 et $U_1 = 2$.

a) Calculer U_n en fonction de n

b) Calculer la somme $U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_7$.

c) (V_n) est une suite arithmétique de raison r et $V_1 = 2$.

Exprimer V_n en fonction de n puis calculer : $V_{30} + V_{31} + V_{32}$.

2- Résoudre les équations différentielles :

a) $y'' + 5y = 0$

b) $y'' + 9y = 0$

c)

3- a) Calculer l'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx$

b) En déduire l'intégrale suivante : $A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{-\pi}{4}} \cos 2x\,dx$

4- Résoudre

a) L'équation : x ∈ $\mathbb{R}$, $2(\ln x)^2 - \ln x - 6 = 0$.

b) L'inéquation : x ∈ $\mathbb{R}$, ln (x – 3) + ln (x –1) < ln (2x +3).

<u>PROBLEME</u> : (10 points)

A

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3+5x^2+9x+5}{2x^2+2}$.

1- Démontrer qu'il existe des réels a, b, c tels que pour x ε $\mathbb{R}$, $f(x)= ax+b + \dfrac{cx}{x^2+1}$
.
2- a) Calculer les limites de la fonction f lorsque x tend vers +∞ , puis vers –∞.

b) Démontrer que la droite (d) d'équation $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ est asymptote à la courbe (C) de f .

c) Etudier la position relative de (C) et (d).

3- Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4- a) Déterminer les coordonnées des points de la courbe (C) où la tangente est parallèle
à la droite (d).

b) Déterminer une équation de ces tangentes.

c) Démontrer que le point $I\left(0\,;\,\dfrac{5}{2}\right)$ est centre de symétrie de la courbe (C).

5- Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i}\,;\,\vec{j}\,)$; l'unité graphique est 1 cm. Tracer la courbe (C) et son asymptote (d).

B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{5}{2}x + 2\ln(x^2+1)$.

1- Démontrer que la fonction g est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en zéro.

2- a) Démontrer que – 1 est la seule racine de $f(x)$.

b) En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

c) Calculer les limites de g lorsque x tend vers +∞ puis vers – ∞.

3- Soit un nombre réel α, α ≥0 ;

a) Calculer en fonction de α, l'aire A (α) en cm2 de l'ensemble des points M(x ; y) du plan tels que : 0≤ x ≤ α et $\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \le y \le f(x)$.

b) Pour quelles valeurs de α a–t–on : A (α) ≤ 1 ?

c) Ecrire 2^x sous la forme e^{kx}, k $\in \mathbb{R}$.