EXERCICE I :

1°) a) Montrer en utilisant l'algorithme d'Euclide qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que : 324u + 245y = 1.

b) Déduire de ce qui précède une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation (E) : 324u – 245y = 7 et résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ cette équation.

2°) Montrer que pour toute solution (x ; y) de (E), x est multiple de 7.

3°) On considère la fraction $A(n) = \dfrac{n+16}{n-2}$ où n est un entier naturel strictement supérieure à 2.

a) Montrer que l'on peut écrire A(n) sous la forme : $a + \dfrac{b}{n-2}$ où a et b sont deux entiers naturels à déterminer.

b) Pour quelles valeurs de n, A(n) est-il un entier naturel ?

EXERCICE II :

Soit E_2 le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé directe $\mathcal{R} = \left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$. Soit f l'application de E_2 dans E_2 telle que :

$$M(x\,;y) \mapsto M'(x'\,;\,y') \text{ et } \begin{cases} x' = x + \sqrt{3}\,(2-y) \\ y' = (x-1)\sqrt{3} + y \end{cases}$$

Soient z et z' les affixes respectives de M et M'.

1°) Montrer que l'on peut déterminer deux nombres complexes uniques a et z_0 tel que : $z' - z_0 = a\,(z - z_0)$.

2°) En déduire la nature de f .

3°) Quelle est l'image par f du cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$.

T.S.V.P →

EXERCICE III :

On considère l'application f_1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f_1(x) = 1 + xe^x$.

1°) Étudier f_1 et construire sa courbe représentative ($\mathcal{C}_1$) dans un repère orthogonal $\mathcal{R} = \left(O; \vec{i}\ ; \vec{j}\right)$ où $\|\vec{i}\| = 1cm$ et $\|\vec{j}\| = 2\,cm$.

2°) On considère l'application f_2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f_2(x) = 1 - x\,e^{-x}$.
Trouver une relation simple entre $f_1(x)$ et $f_2(x)$. En déduire la construction de la courbe ($\mathcal{C}_2$), représentative de la fonction f_2 dans le repère $\mathcal{R}$.

EXERCICE IV :

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^4 (\ln x)^2$.

1°) Donner son ensemble de définition I.

2°) En utilisant une intégration par parties, montrer que :
$F(x) = \int_1^x t^4 (\ln t)^2 \ dt = ax^5 (\ln x)^2 - b\int_1^x t^4 \ln t \ dt$ où a et b sont deux réels à déterminer et x réel strictement supérieur à 0.

3°) En utilisant une intégration par parties calculer $\int_1^x t^4 \ln t \ dt$.

4°) En déduire une primitive de la fonction f sur I.

SESSION DE JUIN 1979

SÉRIES : S.E.T- M.T.I - M.T.G.C **EPREUVE DE : MATHÉMATIQUES (composition)**

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

Partie I : $\mathcal{V}_2$ est le plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée directe $(\vec{i}\,;\vec{j})$.
$\mathcal{E}_2$ est le plan affine euclidien associé à $\mathcal{V}_2$ et rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i};\vec{j})$.

1°) Soit r la rotation vectorielle d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et S_Δ la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite vectorielle Δ engendrée par $\vec{u}=(2-\sqrt{3})\vec{i}+\vec{j}$. Trouver dans la base $(\vec{i}\,;\vec{j})$ les matrices de r et de S_Δ.

2°) On considère maintenant la rotation $R\left(A\,;\frac{\pi}{2}\right)$ associé à r telle que R(O) = O' avec $\overrightarrow{OO'}=\vec{i}+2\vec{j}$ et la symétrie affine orthogonale S_D associé à S_Δ telle que $S_D(O)$ = O'' avec $\overrightarrow{OO''}=\vec{i}+(\sqrt{3}-2)\vec{j}$

a) Préciser le centre A de R et l'axe D de S_D.

b) Quelle est l'équation de la droite D' image de D par R ?

3°) M étant un point quelconque de $\mathcal{E}_2$ de coordonnées (x ;y), on pose $M_1=R(M)$ et $M_2=S_D(M)$. Soit alors l'application f de $\mathcal{E}_2$ dans lui-même qui à M associe le point M' de coordonnées (x' ; y') tel que M' soit le milieu du segment $[M_1M_2]$.

a) Calculer les coordonnées de M_1 et M_2 et en déduire l'expression analytique de f.

b) Déterminer l'image de $\mathcal{E}_2$ par f et donner une équation de cette variété affine.

4°) a) Montrer que f admet un point invariant unique I et déterminer l'ensemble des points de $\mathcal{E}_2$ admettant I comme image par f.

b) Définir l'image de $\mathcal{E}_2$ par $f\circ f$. Que constate-t-on ? pouvait-on prévoir ce résultat ?

Partie II : Soit $\mathcal{E}_2$ le plan affine muni du repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. soit f l'application de dans qui à tout point M (x ; y) associe le point M'(x' ; y') tel que : $\begin{cases} x'=x \\ y'=3y-1 \end{cases}$

1°) Montrer que f est bijective.

2°) Déterminer l'ensemble Δ des points invariants par f.

3°) Démontrer que quelque soit le point M de $\mathcal{E}_2$, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est élément de la droite vectorielle.

4°) Soit M_1 la projection sur Δ dans la direction Δ'. Démontrer qu'il existe un réel k unique tel que $\forall M \in \mathcal{E}_2$, $\overrightarrow{MM'}=k\,\overrightarrow{M_1M}$.

5°) Indiquer sur une figure une construction simple de l'image par f.