
SESSION DE JUIN 1983

<u>SÉRIES</u> : S.E.T – MTI – MTGC **<u>EPREUVE DE</u> : MATHÉMATIQUES (Composition)**

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

A- On se place dans l'ensemble F des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition et de la multiplication par un réel.

I- Soient f_1 et f_2 les deux éléments de F définis par :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f_1(x) = e^x\cos(\frac{\pi}{2}x)$ et $f_2(x) = e^x\sin(\frac{\pi}{2}x)$.

Soit $E = \{ f\in F \ / \ f = af_1 + bf_2, \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}$

1°) a) Démontrer que E est un sous espace vectoriel de F

b) Démontrer que $B = (f_1 \,;\, f_2)$ est une base de E.

2°) a) Montrer que la dérivée de tout élément de E est un élément de E

b) Montrer alors que d, application de E dans E, qui, à tout élément f de E associe d(f) = f ' (sa fonction dérivée) est un endomorphisme de E.

Donner la matrice de f dans la base $(f_1 \,;\, f_2)$.

c) Vérifier que d est une bijection de E dans E. Ecrire la matrice de d^{-1}, bijection réciproque de d dans la base B. En déduire une primitive d'un élément quelconque de E.

II- 1°) Soit φ l'application de E×E dans $\mathbb{R}$, telle que :

$\forall(f, g) \in E\times E$, $\varphi(f, g) = \int_0^2 e^{-2x} f(x).g(x)\,dx$

a) Calculer $\varphi (f_1 , f_1)$; $\varphi (f_2 , f_2)$;$\varphi (f_1 , f_2)$

b) Ecrire $\varphi (f, g)$ en fonction des coordonnées de f dans la base $\mathscr{B}$, ainsi que : $\varphi (f , f)$.

Dans la suite du problème on admet que φ définie un produit scalaire sur E et on note : $\varphi (f , g) = f. g$ (on lit f scalaire g).

c) Vérifier que $\mathscr{B}$ est une Base orthonormée de E.

2°) E muni de φ est un plan vectoriel euclidien et $\mathscr{B}$ est une base orthonormée directe. Démontrer qu'il existe une rotation r telle que $d = h\circ r = r\circ h$ où h est l'homothétie vectorielle de rapport $\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}$ .Si α est une mesure en radians de l'angle de r, vérifier que $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2} \,;\, 0 \right[$.

3°) En déduire que pour toute application f de E, de coordonnées (a, b) dans la base B, $\forall x\in\mathbb{R}$; $f''(x) = \sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}} \,.\, e^x \,[a.\cos(\frac{\pi}{2}x - \alpha) + b.\sin(\frac{\pi}{2}x - \alpha)]$ où α est une mesure de l'angle de r .

B- Etude de $f_1 : x \mapsto e^x \cos\frac{\pi}{2}x$.

Soit ($\mathcal{C}$) la courbe de f_1, (Γ) la courbe d'équation $y = e^x$ et (Γ') la courbe d'équation : $y = -e^x$.

I - 1°/c a) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R} : -e^x \leq f_1(x) \leq e^x$.
b) Calculer les abscisses des points d'intersection de (Γ) et ($\mathcal{C}$). Vérifier qu'en chacun de ces points, (Γ) et ($\mathcal{C}$) ont la même tangente.

c) Faire la même étude pour (Γ') et ($\mathcal{C}$).

2°/ Calculer les coordonnées des points d'intersection de ($\mathcal{C}$) avec l'axe $(O ; \vec{i})$.

II - 1°/ En utilisant le résultat de la partie A, II, 3°), montrer que :

$$f_1'(x) = \sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}.e^x \cos(\frac{\pi}{2}x-\alpha).$$

2°/ Etudier f_1 sur l'intervalle [-1, 3], pour cela :

a) Montrer qu'il existe deux valeurs de x (fonction de α) annulant f_1'dans l'intervalle [-1, 3]. Etudier le signe de f_1' sur [-1, 3].

On pourra par exemple utiliser des résultats connus sur le signe de cosx avec x appartenant à $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ ou $[\frac{3\pi}{2} ; \frac{5\pi}{2}]$, ou bien en utilisant la continuité de f_1', déduire son signe sur un intervalle convenablement choisi du signe de f_1' en un point de cet intervalle.

3°/ En utilisant un repère orthogonal non normé $(O ; \vec{i} , \vec{j}) : (|| \vec{i} || = 4 || \vec{j} ||)$, représenter les courbes (Γ), (Γ') et ($\mathcal{C}$).

On placera les points calculés dans les questions I, II partie B] et calculera en outre les images par f_1 des autres valeurs entières de [-1, 3].

<u>**NB :**</u> $e = 2,7$; $e^2 = 7,4$; $\frac{2\alpha}{\pi} \approx -0,65$; $f(\frac{2\alpha}{\pi} + 1) \approx 1,2$; $f(\frac{2\alpha}{\pi} + 3) \approx -9$

On ne cherchera pas à expliciter α, utiliser les valeurs données.