

EXERCICE I : (3 points)

Soit a un nombre réel vérifiant $0 < a < \pi$. On considère l'équation en z :

$$(E) : z^2 \sin^2 a - 4z \sin a + 4(1 + \cos^2 a) = 0 .$$

1°) Résoudre dans le corps \mathbb{C} des nombres complexes l'équation (E) .

2°) On désigne M' et M'' les images des racines z' et z'' de (E) dans le plan complexe. Montrer que lorsque a varie dans $]0, \pi[$ M' et M'' est une branche d'une hyperbole (\mathcal{H}) dont on précisera les sommets les asymptotes et dont on donnera une représentation graphique.

EXERCICE II : (3points)

Un joueur dispose de 3 dés qu'il lance simultanément. Leurs faces numérotées de 1 à 6. il ne les lance qu'une fois. Son gain est ainsi attribué.

- Si les trois chiffres sortis sont égaux il gagne 5F
- Si parmi les trois chiffres il y a deux « 1 » et deux seulement il gagne 2F.
- Si les trois chiffres sont consécutifs alors il gagne 1F.
- Dans tous les autres cas son gain est nul.

1°) Etablir la loi de probabilité de x .

2°) Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition de x .

3°) Calculer l'espérance mathématique de x .

EXERCICE III : (5points)

\mathcal{P} est un plan affine orienté rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Le point de coordonnées $(x ; y)$ admet pour affixe le nombre complexe $z = x + iy$. On considère l'application f du plan dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ dont l'affixe z' est défini par :

$$z' = (1 - i\sqrt{3})\left(\frac{1}{2}\bar{z} - 1\right) \quad \text{et} \quad z = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\bar{z} - i(1 - \sqrt{3}).$$

1°) quelle est la nature de l'application f ?

2°) Déterminer l'application $f \circ f$. En déduire l'application réciproque f^{-1} .

3°) Montrer que f est la composée d'une symétrie orthogonale (dont on précisera l'axe) et d'une translation (dont on précisera le vecteur).

EXERCICE IV : (4points)

Etudier les variations de la fonction g de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$g(x) = 2x + \sqrt{|x^2 - 1|}$$

Trouver les asymptotes, construire la courbe (C) de g et les tangentes aux points particuliers.

EXERCICE V : (3points)

On considère une suite de terme général U_n , à valeurs réelles, définie par son premier terme U_0 et pour tout n de \mathbb{N}^* , par la relation : $U_n = 3U_{n-1} + 2$

Soit a un nombre réel ; pour tout n de \mathbb{N} , on pose $V_n = U_n + a$.

1°) Calculer a pour que la suite de terme général V_n soit une suite géométrique de raison q . En déduire U_n en fonction de U_0 et n . Peut-on choisir U_0 de façon que pour

tout n de \mathbb{N} on ait : $U_n = V_0$?

2°) On suppose $a = 1$ et $U_0 = 1$. Calculer, en fonction de n la somme

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$$

Quel est le plus petit entier n tel que S_n soit supérieur à 10^4 ?

EXERCICE VI : (2points)

$$\text{Calculer : } \int_0^{2\pi} |\cos x| dx .$$

On considère un plan affine \mathcal{P} rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Dans les représentations graphiques on prendra 2cm pour unité de longueur. On désigne par (E_m) l'ensemble des points M du plan \mathcal{P} dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient la relation :

$$y^2 = m(x^2 - 1) + 2x, \text{ où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

1°/ a) Soit f la fonction qui, au réel x , associe lorsqu'il existe, le réel $y = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$.

Etudier la fonction f et construire sa courbe représentative (\mathcal{C}) dans le plan \mathcal{P} .

Vérifier que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de (\mathcal{C}) .

b) Montrer que l'ensemble (E_1) correspondant à $m=1$ est la réunion de (\mathcal{C}) et d'une courbe (\mathcal{C}') dont on donnera l'équation dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Construire (E_1) et montrer que le point $I(-1 ; 0)$ est un centre de symétrie pour (E_1) .

2°/ a) On considère l'ensemble (E_{-1}) correspondant à $m = -1$.

Quelle est la nature de cet ensemble ? La construire dans le plan \mathcal{P} .

b) On associe aux points $M(x ; y)$ et $M'(x' ; y')$ les nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, appelés affixes de M et de M' . On considère l'application T de \mathcal{P} dans lui-même qui à tout point

$M(x ; y)$ associe le point $M'(x' ; y')$ défini par $z' = az + b$, où a et b sont deux nombres complexes que l'on déterminera sachant que le point $I(0, 1)$ est invariant par T et que l'ensemble E_1 précédent est transformé par T en le cercle de centre O et de rayon 1.

On caractérisera alors l'application T .

c) a et b ayant les valeurs précédemment trouvées, calculer x' et y' en fonction de x et de y . En déduire l'équation de E'_1 transformée de E_1 par l'application T . Préciser la nature de E'_1 .

Démontrer qu'aucun point de E'_1 n'a pour coordonnées un couple d'entiers relatifs.

3°/ a) Montrer que quelque soit le réel m , l'ensemble (E_m) passe par deux points fixes, A et B dont on donnera les coordonnées. Ecrire les équations des tangentes à E_m en ces points A et B .

b) Démontrer que l'ensemble E_0 correspondant à $m=0$, et lui seul, admet en A et B des tangentes dont les coefficients directeurs valent respectivement $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Construire E_0 .

Calculer l'aire de la portion du plan \mathcal{P} limitée par E_0 et la droite d'équation $x = 1$.

c) Sur la droite D d'équation $x = -\frac{1}{2}$, on prend un point N d'ordonnée λ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Soit (Δ) la droite

passant par le point $N(-\frac{1}{2} ; \lambda)$ et de coefficient directeur t , (t réel donné). Quelle relation nécessaire et suffisante doit-elle exister entre t et λ pour que (Δ) soit tangente à E_0 ?

En déduire que par tout point N de D , on peut mener deux tangentes à E_0 qui sont perpendiculaires.

4°/ Montrer que quel que soit le réel non nul m , l'ensemble E_m admet le point $(-\frac{1}{4} ; 0)$ pour centre de symétrie. Quel est l'ensemble (R_1) des valeurs de m pour lesquelles l'ensemble (E_m) est une ellipse? Exprimer alors, en fonction du réel m de R_1 , la longueur de axes de l'ellipse (E_m) et préciser les supports du grand axe et du petit axe.

Barème : 1°/ 4pts ; 2°/ 6pts ; 3°/ 6pts ; 4°/ 4pts.