République Islamique de Mauritanie
Ministère d'Etat à l'Education Nationale, à l'Enseignement Supérieur et à la Recherche Scientifique
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2012
Session Normale

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (3 points)

Soit la fonction $\mathbf{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathbf{f(x)=e^x\ln(e^x+1)}$. Soit $\mathbf{(C)}$ la courbe représentative de $\mathbf{f}$ dans un repère orthonormé $(\mathbf{O};\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}})$.

1. Justifier et interpréter graphiquement les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty \quad\text{et}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty\ .$$ **(0,75 pt)**

2.a) Dresser le tableau de variation de $\mathbf{f}$. **(0,75 pt)**

b) Montrer que $\mathbf{f}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle $\mathbf{J}$ que l'on déterminera. **(0,25 pt)**

c) Tracer la courbe $\mathbf{(C)}$. **(0,25 pt)**

3. On pose $\mathbf{I}=\int_0^1 \mathbf{f(x)dx}$. On se propose de calculer $\mathbf{I}$ par deux méthodes.

<u>Méthode a :</u> Déterminer trois réels **a**, **b** et **c** tels que pour tout réel **x** :

$$f'(x)=f(x)+ae^x+b+\frac{ce^{-x}}{1+e^{-x}}$$. En déduire $\mathbf{I}$. **(0,5 pt)**

<u>Méthode b :</u> En posant $\mathbf{t=e^x+1}$, utiliser une intégration par parties pour calculer $\mathbf{I}$. **(0,5 pt)**

Exercice 2 (3 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(\mathbf{O};\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}})$. On considère les points $\mathbf{A(2;1;3)}$, $\mathbf{B(3;2;1)}$, $\mathbf{C(4;1;4)}$, $\mathbf{D(5;3;-2)}$ et $\mathbf{E(6;-2;-4)}$.

1.a) Calculer $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$, $\overrightarrow{\mathbf{DE}}$. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{DE}}$ est normal au plan $\mathbf{(ABC)}$ **(1 pt)**

b) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathbf{(ABC)}$. **(0, 25 pt)**

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathbf{(DE)}$. **(0, 5 pt)**

d) Déterminer les coordonnées du point $\mathbf{F}$ projeté orthogonal de $\mathbf{D}$ sur le plan $\mathbf{(ABC)}$. Déterminer un réel $\mathbf{k}$ tel que $\overrightarrow{\mathbf{EF}}=\mathbf{k}\overrightarrow{\mathbf{DF}}$ **(0,5 pt)**

2.a) Calculer le volume $\mathbf{V}$ du tétraèdre $\mathbf{ABCD}$. (On rappelle que $\mathbf{V}=\frac{1}{3}\mathbf{Base}\times\mathbf{Hauteur}$). **(0,25 pt)**

b) Déterminer les deux ensembles Γ_1 et Γ_2 des points $\mathbf{M}$ de l'espace définis par :

$$M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow 11MD^2-ME^2=-30$$ **(0,25 pt)**

$$M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow MD^2-ME^2=-36\ .$$ **(0,25 pt)**

Exercice 3 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(\mathbf{O};\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}})$.

Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation $\mathbf{E}_\theta$: $\mathbf{z^2-(6\cos\theta)z+4+5\cos^2\theta=0}$, $\theta\in[0,2\pi[$.

1.a) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $\mathbf{E}_\theta$. On note $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$ les solutions de $\mathbf{E}_\theta$ avec $\mathbf{Im(z_1)\geq 0}$ si $\theta\in[0,\pi[$ **(1 pt)**

b) Préciser les valeurs de θ et les solutions de E_θ dans les cas suivants :

- L'équation E_θ admet des solutions doubles. Dans ce cas on note A_1 et A_2 les points d'affixes respectives z_1, z_2 avec $Re(z_1) \geq 0$. **(0,25 pt)**
- L'équation E_θ admet deux solutions imaginaires pures. Dans ce cas on note B_1 et B_2 les points d'affixes respectives z_1, z_2 avec $Im(z_1) \geq 0$. **(0,25 pt)**

2. Dans le cas général on note M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1, z_2.

a) Déterminer le lieu géométrique Γ des points M_1 et M_2 lorsque θ décrit $\theta \in [0, 2\pi[$. **(1 pt)**

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble Γ et le construire. **(0,5 pt)**

3. On définit l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', barycentre du système $\{(A_1, -4); (B_1, 2); (M, 3)\}$.

a) Ecrire z' en fonction de z puis reconnaitre f et donner ses éléments caractéristiques. **(0, 5 pt)**

b) Donner une équation cartésienne de $\Gamma' = f(\Gamma)$. Donner les éléments caractéristiques de Γ' dans $(O; \vec{u}, \vec{v})$. **(0, 5 pt)**

Exercice 4 (4 points)

On se propose dans cet exercice de calculer la limite de la suite numérique de terme général $U_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, $n \geq 2$.

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - \ln x$.

1. Dresser le tableau de variation de f. **(1 pt)**

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$; on pose $I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)dx$.

a) En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_\lambda^1 \ln x dx$. **(0,5 pt)**

b) En déduire le calcul de $I(\lambda)$ puis $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} I(\lambda)$. **(0,5 pt)**

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$ on pose : $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\dfrac{k}{n})$.

a) Montrer que : $\dfrac{1}{n}f(\dfrac{k+1}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \dfrac{1}{n}f(\dfrac{k}{n})$; pour $1 \leq k \leq n-1$. **(0,25 pt)**

b) En déduire que : $S_n - \dfrac{1}{n}f(\dfrac{1}{n}) \leq I(\dfrac{1}{n}) \leq S_n$ puis que : $I(\dfrac{1}{n}) \leq S_n \leq I(\dfrac{1}{n}) + \dfrac{1}{n}f(\dfrac{1}{n})$. **(0,5 pt)**

c) En utilisant 3.b) montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{3}{2}$. **(0,25 pt)**

4.a) Montrer que : $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{k}{n}\right) = \ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)$ et que $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$. **(0,5 pt)**

b) En déduire que : $S_n = \dfrac{n^2+n}{2n^2} - \ln U_n$. **(0,25 pt)**

c) Déduire de ce qui précède $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$. **(0,25 pt)**

Exercice 5 (6 points)

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral direct $\mathbf{ABC}$ de coté $\mathbf{a}$, $(\mathbf{a}>0)$, de centre $\mathbf{G}$. Soient $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$ les milieux respectifs des segments $[\mathbf{BC}]$, $[\mathbf{CA}]$ et $[\mathbf{AB}]$. Le point $\mathbf{E}$ est le symétrique de $\mathbf{K}$ par rapport à $\mathbf{I}$.

1. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. **(0,5 pt)**

2.a) Montrer qu'il existe une unique rotation $\mathbf{r_1}$ qui transforme $\mathbf{B}$ en $\mathbf{I}$ et $\mathbf{J}$ en $\mathbf{A}$. **(0,5 pt)**

b) Déterminer les éléments caractéristiques de $\mathbf{r_1}$. **(0,5 pt)**

3. Soit $\mathbf{t}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AJ}}$. On pose : $\mathbf{r_2}=\mathbf{t}\circ\mathbf{r_1}$ et $\mathbf{f}=\mathbf{s_{JC}}\circ\mathbf{s_{JE}}\circ\mathbf{s_{KE}}$.

a) Déterminer $\mathbf{r_2(J)}$ et caractériser $\mathbf{r_2}$. **(0,5 pt)**

b) Déterminer deux droites Δ_1 et Δ_2 telles que $\mathbf{r_1}=\mathbf{s_{KC}}\circ\mathbf{s_{\Delta_1}}$ et $\mathbf{r_2}=\mathbf{s_{JC}}\circ\mathbf{s_{\Delta_2}}$. En déduire que $\mathbf{f}=\mathbf{t_{\overrightarrow{AJ}}}\circ\mathbf{s_{KC}}$ **(0,5 pt)**

c) Déterminer l'image du triangle $\mathbf{BIK}$ par $\mathbf{f}$. Justifier que $\mathbf{f}$ est une symétrie glissante et donner sa forme réduite. **(0,5 pt)**

4.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe $\mathbf{s}$ qui transforme $\mathbf{E}$ en $\mathbf{I}$ et $\mathbf{C}$ en $\mathbf{G}$. **(0,5 pt)**

b) Déterminer un angle et le rapport de $\mathbf{s}$. **(0,5 pt)**

c) Montrer que le centre de $\mathbf{s}$ est situé sur les cercles circonscrits aux triangles $\mathbf{BCG}$ et $\mathbf{BEI}$. Préciser ce centre. **(0, 25 pt)**

5. Dans cette question, $\mathbf{M}$ est un point variable du cercle Γ de diamètre $[\mathbf{BC}]$.

On note $\mathbf{s(M)}=\mathbf{M'}$.

a) Déterminer le lieu géométrique Γ' du point $\mathbf{M'}$ lorsque $\mathbf{M}$ décrit Γ. **(0, 25 pt)**

b) Montrer que pour tout point $\mathbf{M}$ de Γ distinct de $\mathbf{B}$, la droite $\mathbf{(MM')}$ passe par le point $\mathbf{K}$. **(0, 25 pt)**

c) En déduire un programme de construction de $\mathbf{M'}$ à partir d'une position de $\mathbf{M}$ sur Γ. Placer $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M'}$ en supposant que les points $\mathbf{B}$, $\mathbf{M}$ et $\mathbf{C}$ se succèdent dans le sens trigonométrique sur Γ. **(0, 25 pt)**

6) Pour tout entier naturel $\mathbf{n}\geq 2$, on pose : $\mathbf{s^2}=\mathbf{s}\circ\mathbf{s}$ et $\mathbf{s^n}=\mathbf{s}\circ\mathbf{s^{n-1}}$. On définit une suite de points $\mathbf{(M_n)}$ par $\mathbf{M_0}=\mathbf{E}$; $\mathbf{M_1}=\mathbf{s(M_0)}$ et $\mathbf{M_n}=\mathbf{s^n(M_0)}$.

a) Sur une nouvelle figure, placer les points $\mathbf{B},\mathbf{M_0},\mathbf{M_1},\mathbf{M_2},\mathbf{M_3}$ (Pour la construction, on pourra prendre la droite $\mathbf{(BE)}$ verticalement avec $\mathbf{BE}=\mathbf{6cm}$). **(0, 25 pt)**

b) Calculer en fonction de $\mathbf{n}$ et $\mathbf{a}$ la somme : $\mathbf{S_n}=\mathbf{M_0M_1}+\mathbf{M_1M_2}+\cdots+\mathbf{M_nM_{n+1}}$. **(0, 25 pt)**

c) Calculer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{S_n}$ et l'interpréter. **(0, 25 pt)**

d) Justifier que : $\mathbf{M_{1960}}\in\mathbf{(BM_4)}$ et $\mathbf{M_{2012}}\in\mathbf{(BG)}$. **(0, 25 pt)**

Fin.