Baccalauréat **Correction** **Pondichéry**

1. Exercice 1 (3 points)

1. a. On a $u_0 = 0$, $u_1 = \dfrac{1}{2-0} = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{1}{2-1/2} = \dfrac{2}{3}$, $u_3 = \dfrac{1}{2-2/3} = \dfrac{3}{4}$.

b. On voit facilement que les termes de u_n sont ceux de $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

c. Par récurrence (ainsi que demandé) ; on vérifie au rang 0 : $u_0 = 0, w_n = \dfrac{0}{1} = 0$, ok.

Supposons alors que $u_n = w_n$ et montrons que $u_{n+1} = w_{n+1}$: ceci est équivalent à $\dfrac{1}{2-u_n} = \dfrac{n+1}{n+2}$, soit $2 - u_n = \dfrac{n+2}{n+1} \Leftrightarrow u_n = 2 - \dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{2n+2-n-2}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$. Tout va bien.

2. a. $v_1 = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $v_2 = \ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$, $v_3 = \ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

On peut utiliser $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$: $v_1 + v_2 + v_3 = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ln 3 - \ln 4 = -\ln 4$ ou bien $\ln(ab) = \ln a + \ln b$: $v_1 + v_2 + v_3 = \ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + \ln\dfrac{3}{4} = \ln\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{3}\dfrac{3}{4}\right) = \ln\dfrac{1}{4} = -\ln 4$.

De toutes manières ceci montre la méthode à utiliser pour la dernière question.

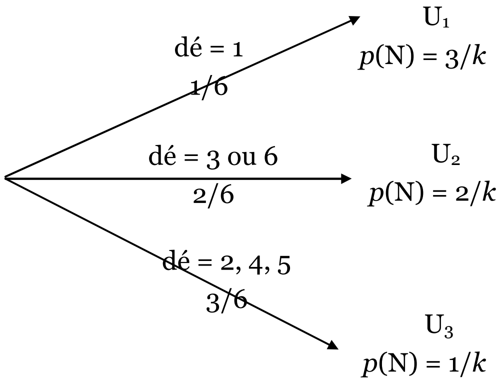
b. $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = \ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + \ldots + \ln\dfrac{n-1}{n} + \ln\dfrac{n}{n+1}$,

soit $S_n = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ldots + \ln(n-1) - \ln n + \ln n - \ln(n+1)$.

Tous les termes intermédiaires disparaissent ; on a donc $S_n = -\ln(n+1)$ qui tend évidemment vers $-\infty$.

2. Exercice 2 (4 points)

On fait un arbre qui donne toutes les réponses immédiatement :



1. a. Pour avoir une boule noire il faut calculer la probabilité d'avoir tiré 1 avec le dé et une noire dans U_1, etc., soit sous forme de probabilité conditionnelle :

$$p(N) = p[(A\cap N)\cup(B\cap N)\cup(C\cap N)] = p(A)p_{U_1}(N) + p(B)p_{U_2}(N) + p(C)p_{U_3}(N).$$

Ceci donne évidemment $p(N)=\frac{1}{6}.\frac{3}{k}+\frac{2}{6}.\frac{2}{k}+\frac{3}{6}.\frac{1}{k}=\frac{10}{6k}=\frac{5}{3k}$.

b. On cherche ici $P_N(dé=1)=\frac{p(A\cap N)}{p(N)}=\frac{1/2k}{5/3k}=\frac{3}{10}$.

c. $\frac{5}{3k}>\frac{1}{2}\Leftrightarrow 3k<10\Leftrightarrow k<\frac{10}{3}$; comme k est entier et supérieur ou égal à 3, il reste k = 3.

d. $\frac{5}{3k}=\frac{1}{30}\Leftrightarrow 3k=150\Leftrightarrow k=50$.

2. Le nombre de fois où on tire une boule noire sur les 20 parties suit une loi binomiale de paramètres n = 20 et $p=\frac{1}{30}$. La probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire est donc

$$p(X\geq 1)=1-p(X=0)=1-\binom{20}{0}\left(\frac{1}{30}\right)^0\left(\frac{29}{30}\right)^{20}=1-\left(\frac{29}{30}\right)^{20}\approx 0,492.$$

3. Exercice 3 (8 points)

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=(x^2+x+1)e^{-x}-1$.

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
φ'		−	0	+	0	−			
φ	$+\infty$	↘	0	↗	$3/e-1$	↘	0	↘	-1

1. a. En $-\infty$ la fonction se comporte comme x^ne^x en +∞, sa limite est donc +∞. En +∞ elle se comporte comme x^ne^x en $-\infty$ ce qui donne 0 − 1 = 0.

b. $\varphi'(x)=(2x+1)e^{-x}-(x^2+x+1)e^{-x}=(x-x^2)e^{-x}=x(1-x)e^{-x}$. On fait éventuellement un tableau de signes pour $x(1-x)$ ou on se rappelle du signe du trinôme ; l'exponentielle est toujours > 0.

2. La fonction φ s'annule évidemment en 0 et comme $\varphi(0)=0$ elle reste positive de $-\infty$ jusqu'à 1. De 1 à +∞ elle est continue, monotone strictement décroissante vers $\left[-1\,;\frac{3}{e}-1\right]$; comme $\frac{3}{e}-1>0$, 0 appartient à l'intervalle image φ s'annule donc bien sur [1 ; +∞[.

A la calculatrice on trouve $\varphi(1,78)\approx 0,003$ et $\varphi(1,79)\approx -0,0008$.

3. On a dit que φ était positive jusqu'à 1 ; après comme φ est décroissante, si $x\leq\alpha$ alors $\varphi(x)\geq\varphi(\alpha)=0$ et si $x\geq\alpha$, $\varphi(x)\leq\varphi(\alpha)=0$.

Partie B : Etude de la position relative de deux courbes et calcul d'aire.

$f(x)=(2x+1)e^{-x}$ et $g(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

1. Même tangente = passent par le même point A et en cet endroit ont même nombre dérivé. Il faut donc calculer f' et g'. Il est immédiat que $f(0)=g(0)=1$

$f'(x)=2e^{-x}-(2x+1)e^{-x}=(2x+1)e^{-x}\Rightarrow f'(0)=1$; $g'(x)=\dfrac{2(x^2+x+1)-(2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}\Rightarrow g'(0)=1$.

2. a. $f(x)-g(x)=(2x+1)e^{-x}-\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}=(2x+1)\left(e^{-x}-\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)=\dfrac{(2x+1)[(x^2+x+1)e^{-x}-1]}{x^2+x+1}$.

b. Par rapport au signe de φ il faut faire intervenir celui de 2x+1 et celui de x^2+x+1 ; or ce trinôme à un discriminant négatif, il est toujours du signe de 1, soit > 0.

c. Lorsque $f-g$ est positive, C_f est au dessus de C_g, c'est donc lorsque $x\in\left[-\dfrac{1}{2};\alpha\right]$. Ailleurs C_f est en-dessous de C_g.

x	$-\infty$		$-1/2$		0		α		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\varphi(x)$		$+$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

3. a. $h'(x)=-2e^{-x}-(-2x-3)e^{-x}-\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}=(2x+1)e^{-x}-\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}=f(x)-g(x)$.

N'oubliez pas que la dérivée de *ln*u est u'/u…

b. Attention quand même au signe : sur $\left[-\dfrac{1}{2};0\right]$ on a bien $f(x)$ supérieur à $g(x)$, on calcule donc simplement $\int_{-1/2}^{0}f(x)-g(x)dx=\left[\,h(x)\,\right]_{-1/2}^{0}=h(0)-h(-1/2)=-3+2\sqrt{e}+\ln(3/4)\approx 0{,}0098$ en unités d'aire.

4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

A. 1. $z^2-2z+4=0$: $\Delta=-12=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$ d'où $z'=\dfrac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$, $z''=\dfrac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3}$.

Pour la forme expo. inutile de chercher midi à quatorze heures : on sait que $e^{i\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, on a donc immédiatement $z'=2\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$; z'' est le conjugué de z', donc $z''=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

2. Faire $(z')^{2004}$ en terme d'angle revient à tourner 2004 fois de $\pi/3$ sur le cerlce trigo ; or 2004 = 3x66, on fait donc 668 demi-tours ou encore 334 tours complets. On revient donc au point de départ qui est 1. Au final $(z')^{2004}=2^{2004}e^{i0}=2^{2004}$.

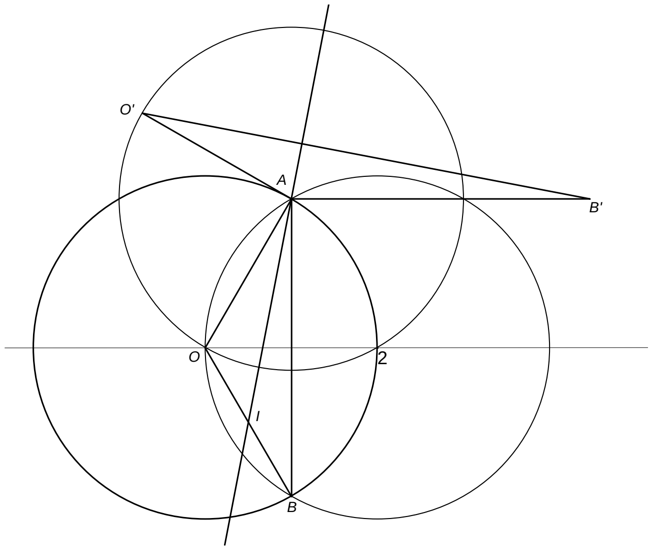
B. 1. Avec la forme exponentielle les deux racines ayant même module 2, elles sont sur le cercle de centre o de rayon2.

2. On rappelle que $r_{(\Omega,\alpha)}:z\to z'/\ z'-\omega=e^{i\alpha}(z-\omega)$; appliquons ici (on se rappelle que $e^{\pm i\frac{\pi}{2}}=\pm i$) :

$$z_{O'}-z_A=e^{-i\frac{\pi}{2}}(0-z_A)\Leftrightarrow z_{O'}=1+i\sqrt{3}-i(-1-i\sqrt{3})=(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})\ ;$$

$$z_{B'}-z_A=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B-z_A)\Leftrightarrow z_{B'}=1+i\sqrt{3}+i(1-i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3})=(1+2\sqrt{3})+i\sqrt{3}\ .$$

3. a. I a pour affixe $z_I = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Il semblerait que (AI) soit une hauteur du triangle ($AO'B'$).



b. & c. Pour le montrer il suffit de vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{O'B'}$ sont orthogonaux, soit avec le produit scalaire soit avec l'argument. Nous faisons les deux.

$$z_{\overrightarrow{AI}} = 1 + i\sqrt{3} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}\ ,\ z_{\overrightarrow{O'B'}} = 1 + 2\sqrt{3} + i\sqrt{3} - (1-\sqrt{3}) - i(1+\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - i\,.$$

Avec le p.s. : $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{O'B'} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$;

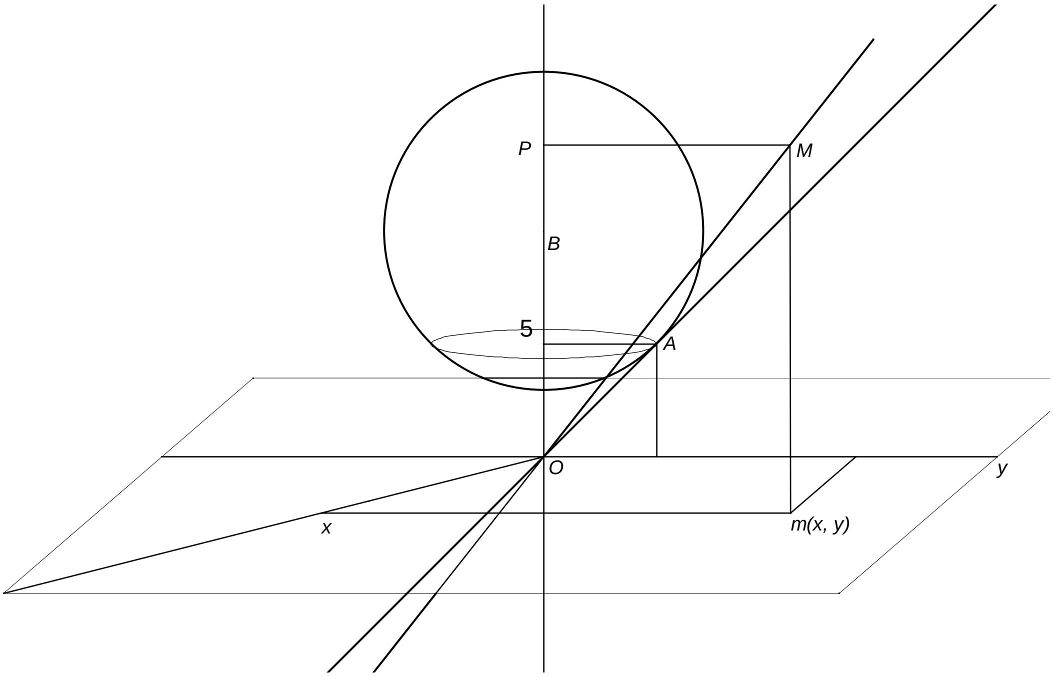
avec l'argument :

$$\left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{O'B'}\right) = \arg\frac{3\sqrt{3}-i}{\frac{1}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \arg 2\frac{3\sqrt{3}-i}{1+i3\sqrt{3}} = \arg 2\frac{(3\sqrt{3}-i)i}{(1+i3\sqrt{3})i} = \arg 2i\frac{3\sqrt{3}-i}{i-3\sqrt{3}} = \arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}\,.$$

5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

$A(0\,;5\,;5)$; $B(0\,;0\,;10)$.

Il vaut mieux se faire un petit schéma pour voir ce qui se passe.



1. La droite (OA) est tangente à (C) si (AB) est orthogonale à (OA) : Pythagore ou le p.s. Avec Pythagore : $AB^2 = 0^2 + 5^2 + 5^2 = 50$, $OB^2 = 100$ et $OA^2 = 5^2 + 5^2 = 50$. Pas de problème.

2. a. (Γ) est défini alors comme l'ensemble des points de l'espace tels que le triangle OMP soit rectangle ; par ailleurs avec Thalès on a :

$$\frac{MP}{5} = \frac{OM}{5\sqrt{2}} = \frac{OP}{5} \Rightarrow 2MP^2 = OM^2 \Leftrightarrow 2Om^2 = 0M^2 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) = x^2 + y^2 + z^2 \text{ d'où } x^2 + y^2 = z^2 .$$

b. Comme les génératrices du cône sont tangentes à la sphère elles passent toutes par un point du cercle horizontal de centre (0 ; 0 ; 5) et de rayon 5. On peut le faire analytiquement :

(S) a pour équation : $x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 50$ d'où en intersectant avec le cône : $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z^2 + (z-10)^2 = 50 \end{cases}$.

La deuxième équation donne $2z^2 - 20z + 50 = 0$, soit $z^2 - 10z + 25 = 0 \Leftrightarrow (z-5)^2 = 0 \Leftrightarrow z = 5$.

Notre intersection est donc caractérisée par $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 5 \end{cases}$.

La première équation donne un cercle d'un plan horizontal, la deuxième l'altitude de ce plan.

3. Le plan $x = 1$ est un plan vertical parallèle à $(O ; \vec{j}, \vec{k})$; son intersection avec le cône ne sera sûrement pas un cercle. Faisons $x = 1$ dans l'équation du cône : $1 + y^2 = z^2$, ce qui donne $z = \pm\sqrt{1+y^2}$, soit des hyperboles (tracez à la calculatrice pour voir).

4. Supposons que x et y soient simultanément impairs : on a $x = 2p+1, y = 2q+1$ d'où en remplaçant :

$$4p^2 + 4p + 1 + 4q^2 + 4q + 1 = z^2 \Leftrightarrow z^2 = 4(p^2 + p + q^2 + q) + 2 \Leftrightarrow z^2 \equiv 2(4).$$

Est-il possible de trouver un nombre qui élevé au carré donne un reste de 2 modulo 4 ? Si ce nombre est pair son carré sera congru à 0 modulo 4, s'il est impair ce sera à 1 modulo 4 ; x et y ne peuvent donc être impairs ensemble.