France métropolitaine correction

1. Exercice 1 (4 points)

1. $u_{n+1}-u_n=2n+3$ qui est évidemment positif. u_n est croissante.

2. a. Par récurrence : $u_0=1>0^2$, la propriété est vraie au rang 0. Au rang $n+1$ il faut montrer que $u_{n+1}>(n+1)^2=n^2+2n+1$; or si $u_n>n^2$, alors $u_{n+1}>n^2+2n+3$ qui est évidemment supérieur à n^2+2n+1. C'est fini.

b. Comme $u_n>n^2$ et que n^2 tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, u_n tend clairement vers $+\infty$.

3. On calcule les premières valeurs de u_n : $u_0=1,\ u_1=1+2.0+3=4,\ u_2=4+2.1+3=9,\ u_3=9+2.2++3=16$. On voit apparaître la suite des carrés des entiers avec un décalage d'un cran par rapport à l'indice ; il s'agit donc de montrer que $u_n=(n+1)^2$: encore une récurrence.

$u_{n+1}=(n+1)^2+2n+3=n^2+2n+1+2n+3=n^2+4n+4=(n+2)^2$. C'est bon.

2. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

1. Soit on développe brutalement en utilisant le binôme de Newton, soit on calcule d'abord $(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$, ce qui donne $(1+i)^6=(2i)^3=-8i$. Une autre possiblité était de mettre $1+i$ sous forme trigonométrique : $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ d'où $(1+i)^6=\sqrt{2}^6e^{i6\frac{\pi}{4}}=8e^{i\frac{3\pi}{2}}=-8i$.

2. a. Comme $(1+i)^6=-8i$, on a $\left[(1+i)^3\right]^2=-8i$ donc $(1+i)^3$ est une solution. On peut développer et trouver $-2+2i$.

b. D'une manière générale l'équation $z^2=u$ a les deux solutions $z=\sqrt{u}$ et $z=-\sqrt{u}$, soit ici l'autre racine $z=-(1+i)^3=-(1+i)^2(1+i)=-2i(1+i)=2-2i$.

3. De la même manière on peut écrire $(1+i)^6=\left[(1+i)^2\right]^3$ donc $(1+i)^2$ est une solution de (E') (on peut simplifier et trouver $2i$).

4. a. La définition de r donne : $z\to z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z$, soit avec $2i$: $b=2ie^{i\frac{2\pi}{3}}=2i\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sqrt{3}-i$; puis pour C : $c=be^{i\frac{2\pi}{3}}=2ie^{i\frac{2\pi}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}}=2ie^{i\frac{4\pi}{3}}=2i\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}-i$.

b. En utilisant la forme trigonométrique on a : $b^3=\left(2ie^{i\frac{2\pi}{3}}\right)=-8ie^{i\frac{6\pi}{3}}=-8i$ et la même chose pour c.

5. a. b. c. : La rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$ transforme A en B, B en C et C en A donc le triangle ABC est équilatéral de centre O qui est donc son centre de gravité.

3. Exercice 2 (5 points, spécialistes)

1. On redémontre le théorème sur la somme des termes d'une suite géométrique : on développe $(x-1)(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1})=(x+x^2+\ldots+x^k)-(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1})=x^k-1$.

Faut-il faire une récurrence ? A priori oui pour être tout à fait correct, mais le temps passé ne risque pas d'être payé de retour. On se satisfera donc de ceci.

2. a. $n = dk$. Remplaçons x par a^d dans la relation précédente :

$$(a^d - 1)(1 + a^d + a^{2d} + ... + a^{d(k-1)}) = a^{dk} - 1 = a^n - 1.$$

$a^d - 1$ est en facteur dans $a^n - 1$, c'en est bien un diviseur.

La question est très classique et a dû être vue en cours.

b. On effectue la décomposition en facteurs premiers de 2004 : $2004 = 2^2.3.167$ donc $2^{2004} - 1$ est divisible par $2^2 - 1 = 3, 2^3 - 1 = 7, 2^4 - 1 = 15, 2^6 - 1 = 63, 2^{12} - 1 = 4095, ...$ $2^{2004} - 1$ est donc divisible par 7 et 63 ; comme 9 divise 63 il divise également $2^{2004} - 1$.

Vous pouvez finir la décomposition et trouver tous les facteurs…

3. a. Bézout dit : m' et n' sont premiers entre eux si et seulement si il existe u et v tels que $um' + vn' = 1$ (ou $um' - vn' = 1$). On multiplie tout par d : $udm' + vdn' = d$, soit $um + vn = d$ (ou $um - vn = d$).

Le changement de signe n'est pas nécessaire, mais plutôt déstabilisant…

b. Développons :

$$a^{mu} - 1 - a^{nv+d} + a^d = a^d - 1 \Leftrightarrow a^{mu} - a^{nv+d} = 0 \Leftrightarrow a^{mu} = a^{nv+d} \Leftrightarrow mu = nv + d \Leftrightarrow mu - nv = d.$$

Divisons la relation $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^d - 1$ par $D = a^d - 1$: $(\frac{a^{mu} - 1}{a^d - 1}) - (\frac{a^{nv} - 1}{a^d - 1})a^d = 1$; ceci montre qu'il existe deux entiers tels que $1.A - a^d.B = D$ où $A = \frac{a^{mu} - 1}{a^d - 1}$ et $B = \frac{a^{nv} - 1}{a^d - 1}$. A et B sont donc premiers entre eux et D est le PGCD de A et B.

c. Le PGCD de $2^{63} - 1$ et de $2^{60} - 1$ est obtenu en passant par le PGCD de 63 et 60 qui est $d = 3$. On a alors $1.63 - 1.60 = 3$ d'où en prenant $a = 2$: $A = 2^{63} - 1$, $B = 2^{60} - 1$ et $D = 2^3 - 1 = 7$.

4. Exercice 3 (5 points)

1. Réponse D : on écrit classiquement la relation $\overrightarrow{SM} = t\vec{n}$ où $\vec{n}$ est le vecteur normal à P : $\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \\ z-0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, ce qui donne $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = -3t \end{cases}$ qui ne correspond à rien de ce qui est proposé. En examinant les diverses solutions proposées on voit que A et C ne peuvent convenir, le vecteur n'étant pas le bon. Il reste à vérifier S dans les autres : si on fait $x = 1$, $y = -2$, $z = 0$ dans B on obtient $t = -1$, $t = -1$, $t = 1/3$ ce qui n'est pas correct, par contre dans D on a $t = -1$ dans les trois cas.

2. Réponse D : avec les équations paramétriques obtenues on remplace dans l'équation de P : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = -3t \end{cases}$

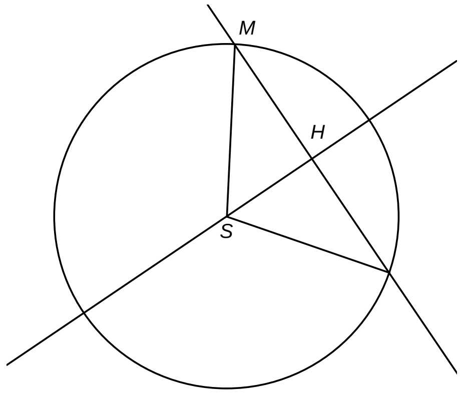
donne $(1 + t) + (-2 + t) - 3(-3t) + 4 = 0 \Leftrightarrow 11t = -3 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{11}$ d'où les coordonnées du point d'intersection H :

$$\begin{cases} x = 1 - 3/11 = 8/11 \\ y = -2 - 3/11 = -25/11 \\ z = -3.3/11 = -9/11 \end{cases}.$$

3. Réponse B : soit on calcule

$$AH = \sqrt{\left(1 - \frac{8}{11}\right)^2 + \left(-2 + \frac{25}{11}\right)^2 + \left(0 + \frac{9}{11}\right)^2} = \frac{\sqrt{9 + 9 + 81}}{11} = \frac{3}{\sqrt{11}},$$

soit on applique la formule de la distance d'un point à un plan :



$$d(S,\,P)=\frac{\left|1.1+1.(-2)-3.0+4\right|}{\sqrt{1^2+1^2+(-3)^2}}=\frac{3}{\sqrt{11}}.$$

4. Réponse B : On a $3/\sqrt{11}<3$ donc H est à l'intérieur de la sphère et P coupe la sphère suivant un cercle (passant par M sur la figure). Le rayon du cercle est MH que l'on calcule avec Pythagore : $SH^2+HM^2=SM^2 \Leftrightarrow HM^2=3^2-\left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right)^2=9-\frac{9}{11}=\frac{90}{11} \Rightarrow HM=\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{11}}$.

5. Exercice 4 (6 points)

1. $p([0\,;200[)=\int_0^{200}\lambda e^{-\lambda x}dx=\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{200}=-e^{-200\lambda}+1$; il faut donc résoudre

$$1-e^{-200\lambda}=0,5 \Leftrightarrow e^{-200\lambda}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow -200\lambda=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2 \Leftrightarrow \lambda=\frac{\ln 2}{200}.$$

2. $p([300\,;+\infty[)=1-\int_0^{300}\lambda e^{-\lambda x}dx=1-(-e^{-300\lambda}+1)=e^{-300\frac{\ln 2}{200}}=e^{-\frac{3}{2}\ln 2}=\left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{3}{2}}=2^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\approx 0,35$.

3. On intègre par parties en posant $u=\lambda x$, $v'=e^{-\lambda x}$ d'où $u'=\lambda$ et $v=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$:

$$\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}dx=\left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^A-\int_0^A -e^{-\lambda x}dx=-Ae^{-\lambda A}+0+\left[\frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^A=-Ae^{-\lambda A}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda A}+\frac{1}{\lambda}=\frac{-\lambda Ae^{-\lambda A}-e^{-\lambda A}+1}{\lambda}$$

.

4. L'exponentielle l'emporte sur toute fonction polynôme d'où $Ae^{-\lambda A}$ tend vers 0 lorsque A tend vers $+\infty$. La limite d_m est alors $\frac{1}{\lambda}$ qui est la *moyenne* de la loi exponentielle. Dans l'exemple on a donc $d_m=\frac{200}{\ln 2}\approx 289$ semaines.