Amérique du Sud Correction remplacement

1. Exercice 1 (7 points)

$f(x) = xe^{-x}$ sur $[0\,;+\infty[$.

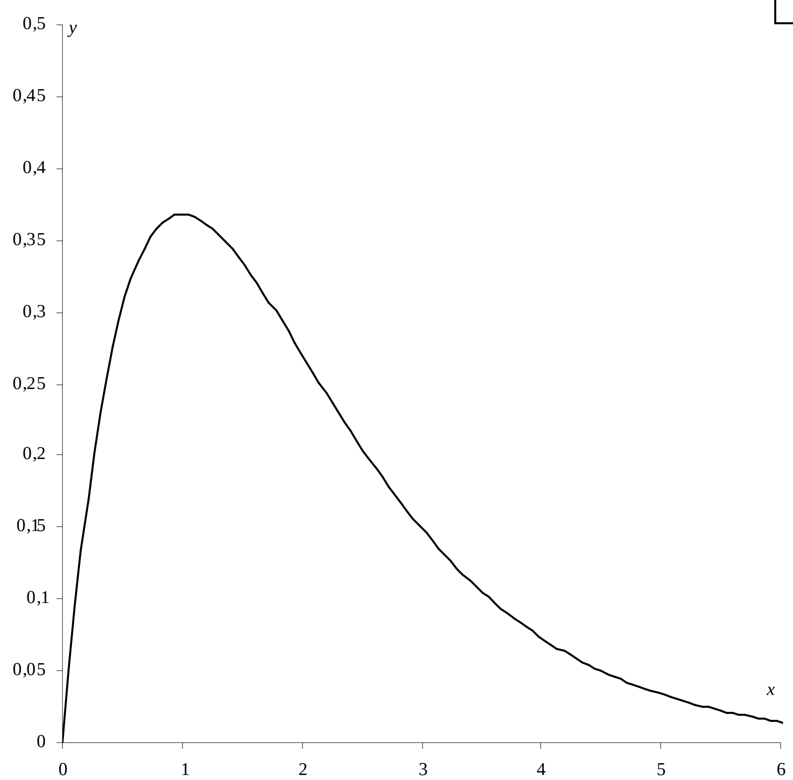
Partie A

1. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} -Xe^{X} = 0$.

b. $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$. L'ex ponentielle est positive, *f'* est du signe de 1 – *x*.

x	0		1		$+\infty$
f'		+	0	−	
f	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

c.



2. a. La droite d'équation $y = m$ coupe la courbe Γ en deux points, l'équation $f(x) = m$ a donc bien deux solutions. Plus scientifiquement, lorsque m est dans $\left]0\,;\frac{1}{e}\right[$, il a deux antécédents par *f* : un antécédent entre 0 et 1 car *f* est croissante et continue de $]0\,;1[$ vers $\left]0\,;\frac{1}{e}\right[$, l'autre entre 1 et $+\infty$ car *f* est continue, monotone, décroissante de $]1\,;+\infty[$ vers $\left]0\,;\frac{1}{e}\right[$.

b. On cherche quand *f*(*x*) encadre 1/4 : *f*(0,3573) = 0,2499 et *f*(0,3574) = 0,25001.

c. $f(x) = 0$ a l'unique solution 0 (tableau de variation) et $f(x) = \frac{1}{e}$ a pour unique solution 1.

Partie B $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$

a. Comme $u_0 = \alpha > 0$ et que si $u_n > 0$ alors $u_n e^{-u_n} > 0$, il est clair que $u_n > 0$ pour tout *n*.

b. On peut faire $u_{n+1} - u_n = u_n e^{-u_n} - u_n = u_n(e^{-u_n} - 1)$; or $u_n > 0 \Leftrightarrow -u_n < 0 \Leftrightarrow e^{-u_n} < 1 \Leftrightarrow e^{-u_n} - 1 < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

c. (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge donc. Soit l sa limite, on a $le^{-l} = l \Leftrightarrow \begin{cases} l = 0 \\ e^{-l} = 1 \Leftrightarrow -l = 0 \end{cases}$; la seule possibilité est que $l = 0$.

2. $w_n = \ln u_n$.

a. Prenons le logarithme de $u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \Leftrightarrow \ln u_{n+1} = \ln u_n + \ln e^{-u_n} = \ln u_n - u_n \Leftrightarrow w_{n+1} = w_n - u_n$, soit $u_n = w_n - w_{n+1}$.

b. $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = w_0 - \cancel{w_1} + \cancel{w_1} - \cancel{w_2} + \ldots + \cancel{w_{n-1}} - \cancel{w_n} + \cancel{w_n} - w_{n+1} = w_0 - w_{n+1}$.

c. Comme u_n tend vers 0, w_n tend vers $-\infty$, donc S_n tend vers $+\infty$.

3. En fait à partir de $u_0 = \alpha$ on a $u_1 = f(\alpha) = \frac{1}{4}$; mais $f(\beta) = \frac{1}{4}$, donc si l'on prend $v_0 = \beta$, à partir du rang 1 les deux suites seront confondues.

2. Exercice 2 (3 points)

1. (E) $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$ et $y(0) = e$: $f(x) = Ce^{-x}$ et $f(0) = Ce^0 = C = e$ donc $f(x) = ee^{-x} = e^{1-x}$.

2. $e^{1-x} = t \Leftrightarrow 1 - x = \ln t \Leftrightarrow x = 1 - \ln t$ (on a ainsi la fonction réciproque de *f* : $f^{-1}(t) = 1 - \ln t$).

3. $V = \pi\int_1^e (1-\ln t)^2\,dt$: on pose $u = (1-\ln t)^2$, $v' = 1$, d'où $u' = 2\left(-\frac{1}{t}\right)(1-\ln t)$ et $v = t$:

$$V = \pi\int_1^e (1-\ln t)^2\,dt = \pi\left[\,t(1-\ln t)^2\,\right]_1^e + 2\pi\int_1^e 1-\ln t\,dt = 0 - \pi + 2\pi\int_1^e 1-\ln t\,dt\ ;$$

on pose $u = 1-\ln t$, $v' = 1$, d'où $u' = -\frac{1}{t}$ et $v = t$: $\int_1^e 1-\ln t\,dt = \left[\,t(1-\ln t)\right]_1^e - \int_1^e -1\,dt = -1 + (e-1) = e-2$ et enfin $V = -\pi + 2\pi e - 4\pi = \pi(2e-5) \approx 1,37$.

Remarque : on voit sur la figure que le volume en question est quasiment celui d'un cône de base un cercle de rayon 1 et de hauteur 1,5. Comme le volume d'un cône est $\frac{1}{3}\pi R^2 h$, on a bien environ 1,5.

3. Exercice 3 (5 points)

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage de deux boules simultanément de l'urne : il y a $\binom{6}{2} = \frac{6.5}{2} = 15$ tirages possibles.

« On n'a obtenu aucune boule noire » revient à dire que l'on a tiré deux rouges parmi 4, il y a $\binom{4}{2} = \frac{4.3}{2} = 6$ et la probabilité est $p(\mathrm{A}_0) = \frac{6}{15}$;

de même « on a obtenu une seule boule noire » revient à dire qu'on a tiré une noire parmi 2 et une rouge parmi 4, il y a $\binom{2}{1}.\binom{4}{1}=8$ manières de procéder, ce qui donne $p(A_1)=\frac{8}{15}$; comme la seule possibilité restante est de tirer 2 noires, on a $p(A_2)=1-p(\bar{A}_2)=1-\left(\frac{6}{15}+\frac{8}{15}\right)=\frac{1}{15}$.

2. a. Lors de ce deuxième tirage on a $\binom{4}{2}=6$ tirages possibles.

Si on a tiré 0 noire au 1er tirage, on a tiré 2 rouges ; il reste donc 2 rouges et 2 noires dans la boite et la probabilité de tirer 0 noire est celle de tirer 2 rouges parmi 2, soit $p_{A_0}(B_0)=\frac{\binom{2}{2}}{6}=\frac{1}{6}$;

si on a tiré 1 noire au 1er tirage, on a tiré également 1 rouge ; il reste donc 3 rouges et 1 noire dans la boite et la probabilité de tirer 0 noire est celle de tirer 2 rouges parmi 3, soit $p_{A_1}(B_0)=\frac{\binom{3}{2}}{6}=\frac{3}{6}$;

si on a tiré 2 noires au 1er tirage, on a tiré 0 rouge ; il reste donc 4 rouges et 0 noire dans la boite et la probabilité de tirer 0 noire est celle de tirer 2 rouges parmi 4, soit $p_{A_2}(B_0)=\frac{\binom{4}{2}}{6}=\frac{6}{6}=1$ (en fait c'était évident…puisqu'il n'y a plus que des rouges).

b. avec les probabilités totales on a $p(B_0)=p(B_0\cap A_0)+p(B_0\cap A_1)+p(B_0\cap A_2)$, soit

$$p(B_0)=p_{A_0}(B_0)p(A_0)+p_{A_1}(B_0)p(A_1)+p_{A_2}(B_0)p(A_2)=\frac{1}{6}.\frac{6}{15}+\frac{3}{6}.\frac{8}{15}+\frac{6}{6}.\frac{1}{15}=\frac{6}{15}.$$

c. De la même manière on a

$$p_{A_0}(B_1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{6}=\frac{4}{6},\ p_{A_1}(B_1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{6}=\frac{3}{6},\ p_{A_2}(B_1)=0\ ;$$

$$p(B_1)=p_{A_0}(B_1)p(A_0)+p_{A_1}(B_1)p(A_1)+p_{A_2}(B_1)p(A_2)=\frac{4}{6}.\frac{6}{15}+\frac{3}{6}.\frac{8}{15}+0.\frac{1}{15}=\frac{8}{15}\ ;$$

$$p_{A_0}(B_2)=\frac{\binom{2}{2}}{6}=\frac{1}{6},\ p_{A_1}(B_2)=0,\ p_{A_2}(B_2)=0\ ;$$

$$p(B_2)=p_{A_0}(B_2)p(A_0)+p_{A_1}(B_2)p(A_1)+p_{A_2}(B_2)p(A_2)=\frac{1}{6}.\frac{6}{15}+0.\frac{8}{15}+0.\frac{1}{15}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}.$$

d. On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage, on connaît donc B_1. Nous cherchons alors

$$p_{B_1}(A_1)=\frac{p(A_1\cap B_1)}{p(B_1)}=\frac{p_{A_1}(B_1)p(A_1)}{p(B_1)}=\frac{\frac{1}{2}.\frac{8}{15}}{\frac{8}{15}}=\frac{1}{2}.$$

3. $p(R)=p(A_0\cap B_2)+p(A_1\cap B_1)=p(A_0)p_{A_0}(B_2)+p(A_1)p_{A_1}(B_1)$, soit $p(R)=\frac{6}{15}.\frac{1}{6}+\frac{8}{15}.\frac{3}{6}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Partie A

$a=5+5i$, $b=1+3i$ et $c=8-4i$.

1. $\Omega(5)$; $\Omega A=|5+5i-5|=5$, $\Omega B=|1+3i-5|=|-4+3i|=\sqrt{16+9}=5$ et $\Omega C=|8-4i-5|=|3-4i|=5$ donc A, B et C sont des points du cercle Γ.

2. On vérifie par exemple que D est sur BC, soit que $\overrightarrow{BD}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$: $\det\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}\right)=\begin{vmatrix}2-1 & 8-1\\ 2-3 & -4-3\end{vmatrix}=-7+7=0$ et que $\overrightarrow{OD}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC}$: $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}7\\-7\end{pmatrix}=14-14=0$.

Partie B $z'=\dfrac{20}{\overline{z}}$.

1. On peut écrire $z'=\dfrac{20}{\overline{z}}=\dfrac{20z}{\overline{z}z}\Rightarrow\overrightarrow{OM'}=\dfrac{20}{OM^2}\overrightarrow{OM}$, ce qui montre que les points O, M et M' sont alignés.

2. a. M a pour affixe $z=2+iy$ donc $z+\overline{z}=2+iy+2-iy=4$.

b. $z'+\overline{z}'=\dfrac{20}{\overline{z}}+\dfrac{20}{\overline{\overline{z}}}=\dfrac{20}{\overline{z}}+\dfrac{20}{z}=\dfrac{20(z+\overline{z})}{\overline{z}z}=\dfrac{80}{\overline{z}z}$; on a donc $5\left(z'+\overline{z}'\right)=\dfrac{400}{\overline{z}z}=\dfrac{20}{\overline{z}}.\dfrac{20}{z}=z'\overline{z}'$.

c. Il est clair que M' est sur (OM) puisque O, M et M' sont alignés. Il reste à montrer que M' est sur Γ, soit que

$|z'-5|=5\Leftrightarrow(z'-5)(\overline{z'-5})=25\Leftrightarrow(z'-5)(\overline{z}'-5)=25\Leftrightarrow z'\overline{z}'-5(z'+\overline{z}')+25=25\Leftrightarrow z'\overline{z}'=5(z'+\overline{z}')$.

C'est bon.