Baccalauréat **Correction** **Nouvelle-Calédonie**

1. Exercice 1 (5 points)

$z' = z^2 - 4z$.

1. a. $z_A = 1 - i \to z_{A'} = (1-i)^2 - 4(1-i) = -2i - 4 + 4i = -4 + 2i$ et $z_B = 3 + i \to z_{B'} = 9 + 6i - 1 - 12 - 4i = -4 + 2i$.

b. appelons u et v les affixes des points U et V en question : $u' = u^2 - 4u$ et $v' = v^2 - 4v$; leurs images sont identiques si

$$u' = v' \Leftrightarrow u^2 - 4u = v^2 - 4v \Leftrightarrow u^2 - v^2 - 4u + 4v = 0 \Leftrightarrow (u-v)(u+v) - 4(u-v) = 0 \Leftrightarrow (u-v)(u+v-4) = 0.$$

On a donc soit $u = v$, soit $u + v = 4 \Leftrightarrow \frac{u+v}{2} = 2$, et dans ce cas le milieu de $[UV]$ a pour affixe 2 et l'un est l'image de l'autre par la symétrie de centre 2.

2. a. $I(-3)$. $OMIM'$ est un parallélogramme si et seulement si

$$\overline{OM} = \overline{M'I} \Leftrightarrow z - 0 = -3 - z' \Leftrightarrow z' + z + 3 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 3z + 3 = 0.$$

b. $z^2 - 3z + 3 = 0$: $\Delta = 9 - 12 = -3 = 3i^2$ d'où $z_1 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. a. $(z'+4) = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2 \Rightarrow \begin{cases} |z'+4| = |z-2|^2 \\ \arg(z'+4) = 2\arg(z-2) + 2k\pi \end{cases}$.

b. Soit M un point du cercle (C) de centre $J(2)$ et de rayon 2, son affixe z est telle que $|z-2| = 2$, et son image M' est telle que $|z'+4| = 2^2 = 4$ d'où M' est sur le cercle de centre $K(-4)$, de rayon 4.

c. $z_E + 4 = -3i = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$; si E est l'image d'un point z, on a

$$\arg(z_E + 4) = 2\arg(z-2) + 2k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} = 2\arg(z-2) + 2k\pi \Leftrightarrow \arg(z-2) = -\frac{\pi}{4} - k\pi.$$

Sur le cercle trigo il y a donc deux arguments possibles, $-\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$. Il reste à trouver les modules : $|z_E + 4||-3i| = 3 = |z-2|^2 \Rightarrow |z-2| = 3$. Conclusion on a $z - 2 = 3e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ou $z - 2 = 3e^{-i\frac{\pi}{4}}$, soit $z = 2 + 3e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2 + 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ou $z = 2 + 3e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2 + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{2} - i\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

2. Exercice 2 (5 points)

1. Il n'y a qu'une bonne réponse : **b.** $\left(\frac{3}{4} ; 0 ; 0\right)$. A a pour coordonnées (0 ; 0 ; 0) et B(1 ; 0 ; 0) d'où L a pour coordonnées : $x_L = \frac{1}{3+1}(1.0 + 3.1) = \frac{3}{4}$ et 0 pour les autres.

2. Le plan (P) est le plan :

Propositions	a. (*GLE*)	b. (*LEJ*)	c. (*GFA*)
Réponses	Vrai	Faux	Faux

C'est un peu pénible car il faut regarder tous les points ; $G(1\,;\,1\,;\,1)$ donc $4-4+3-3=0$ et G est dans P ; $E(0\,;\,0\,;\,1)$ est aussi dans P ainsi que L. $J\left(1\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$: $4-2+3-3\neq 0$, $F(1\,;\,0\,;\,1)$: $4-0+3-3\neq 0$.

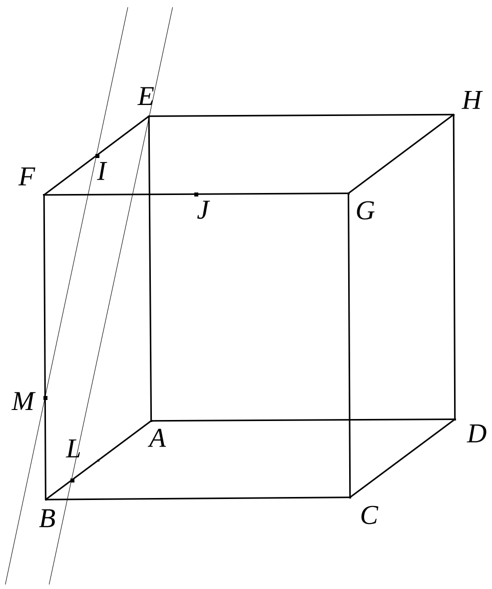
3. Une seule bonne réponse :

Propositions	a. $\left(1\,;0\,;\frac{1}{4}\right)$	b. $\left(1\,;0\,;\frac{1}{5}\right)$	c. $\left(1\,;0\,;\frac{1}{3}\right)$
Réponses	Faux	Faux	Vrai

I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;0\,;1\right)$; il nous faut l'équation de ce plan :

$$\begin{pmatrix}4\\-4\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1/2\\y-0\\z-1\end{pmatrix}=4x-2-4y+3z-3=0\Leftrightarrow 4x-4y+3z-5=0\,.$$

La droite (FB) est facile à trouver : $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$; le point M est donc donné par $4-0+3z-5=0\Leftrightarrow z=\frac{1}{3}$.



4. Il y a intérêt à placer les points sur la figure… mais ce n'est pas suffisant malheureusement…

Propositions	a. Les droites (EL) et (FB) sont sécantes en un point N qui est le symétrique de M par rapport à B.	b. Les droites (EL) et (IM) sont parallèles.	c. b. Les droites (EL) et (IM) sont sécantes.
Réponses	Vrai	Vrai	Faux

$L\left(\frac{3}{4}\,;0\,;0\right)$, $E(0\,;\,0\,;\,1)$, $F(1\,;\,0\,;1)$, $B(1\,;\ \ 0\,;\,0)$, $M\left(1\,;0:\frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{EL}=\left(\frac{3}{4}\,;0\,;-1\right)$, $\overrightarrow{FB}=(0\,;0\,;-1)$,
$I\left(\frac{1}{2}\,;0\,;1\right)$, $\overrightarrow{IM}=\left(\frac{1}{2}\,;0\,;-\frac{2}{3}\right)$.

(EL) a pour équations paramétriques $\begin{cases} x = 0 + \frac{3}{4}t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases}$ et (FB) : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 - t' \end{cases}$ d'où leur intersection donnée par

$\begin{cases} \frac{3}{4}t = 1 \\ 0 = 0 \\ 1 - t = 1 - t' \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{4}{3} = t'$. On a donc le point $N\left(1; 0\,; -\frac{1}{3}\right)$; le milieu de $[MN]$ est $B(1\,;0\,;0)$.

$$\overrightarrow{EL} = \left(\frac{3}{4}\,;0\,;-1\right) = k\overrightarrow{IM} = k\left(\frac{1}{2}\,;0\,;-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{k}{2} = \frac{3}{4} \\ 0 = 0 \\ -\frac{2k}{3} = -1 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{3}{2}.$$

5.

Propositions	a. $\frac{1}{36}$	b. $\frac{1}{48}$	c. $\frac{1}{24}$
Réponses	Vrai	Faux	Faux

La base est le triangle *FIJ* de surface $\frac{1}{8}$, la hauteur est la longueur *FM*, soit $\frac{2}{3}$, le volume de *FIJM* est donc $\frac{1}{3}.\frac{1}{8}.\frac{2}{3} = \frac{1}{36}$.

3. Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par . On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. $g'(x) = e^x - 1$ est positive lorsque $x \geq 0$; $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$: comme g est décroissante avant 0 et croissante après, g est toujours positive.

2. Comme $g(x) \geq 0$, on a $e^x - x \geq 1 \Rightarrow e^x - x > 0$ (ceci montre que f est définie sur $\mathbb{R}$).

Partie B

1. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x - x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} = \frac{1}{+\infty} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x - x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} = \frac{1}{0 - 1} = -1$.

b. On a une asymptote horizontale en $-\infty$: $y = -1$ et une autre en $+\infty$: $y = 0$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

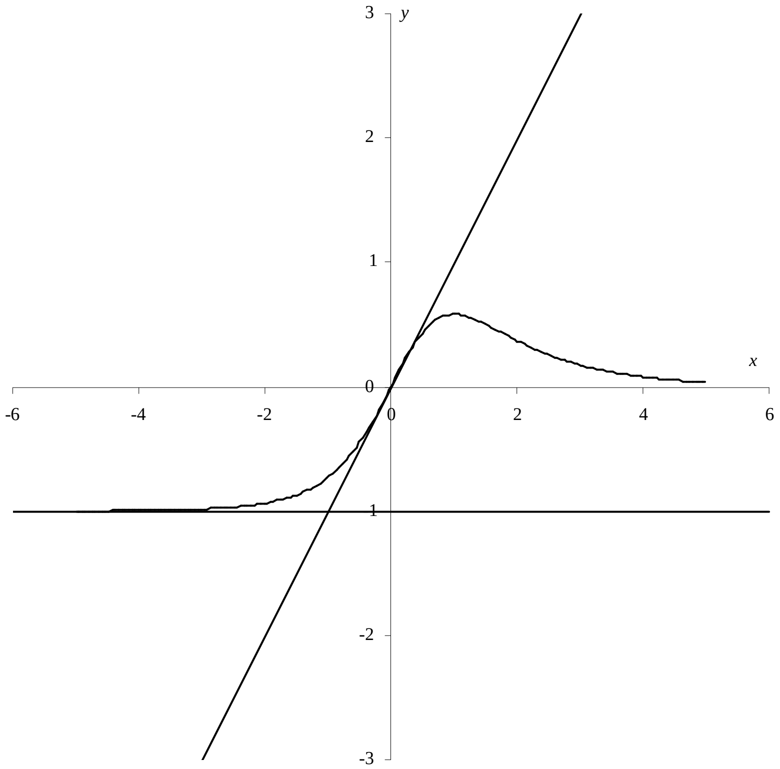
2. a. $f'(x) = \frac{1(e^x - x) - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x - x - xe^x + x}{(e^x - x)^2} = \frac{(1 - x)e^x}{(e^x - x)^2}$.

b. f' est du signe de $1-x$.

3. a. $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x$.

b. $f(x)-x=\dfrac{x}{e^x-x}-x=\dfrac{x-xe^x+x^2}{e^x-x}=\dfrac{-x(e^x-x-1)}{e^x-x}=\dfrac{-xg(x)}{e^x-x}$. Comme g est positive, ainsi que e^x-x, $f(x)-x$ est du signe de $-x$, soit positif avant 0 (C est au-dessus de T), négatif après (C est en dessous de T).

4.



4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

$\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0=4 \\ v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}+v_n}{2} \end{cases}$.

1. $u_1=\dfrac{u_0+v_0}{2}=\dfrac{7}{2}$, $v_1=\dfrac{u_1+v_0}{2}=\dfrac{15}{4}$, $u_2=\dfrac{u_1+v_1}{2}=\dfrac{29}{8}$, $v_2=\dfrac{u_2+v_1}{2}=\dfrac{59}{16}$.

2\. a. $w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}+v_n}{2}-\dfrac{u_n+v_n}{2}=\dfrac{u_{n+1}-u_n}{2}=\dfrac{\dfrac{u_n+v_n}{2}-u_n}{2}=\dfrac{u_n+v_n-2u_n}{4}=\dfrac{v_n-u_n}{4}=\dfrac{1}{4}w_n$.

b. $w_0=v_0-u_0=4-3=1$ donc $w_n=1.\dfrac{1}{4^n}=\dfrac{1}{4^n}$; sa limite est évidemment 0.

3\. On a vu que $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{2}=w_{n+1}>0$ donc u_n est croissante ; par ailleurs $w_n=v_n-u_n>0$ donc $u_n>v_n$; enfin $v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{2}u_{n+1}+\dfrac{1}{2}v_n-v_n=\dfrac{1}{2}(u_{n+1}-v_n)=\dfrac{1}{2}(\dfrac{u_n+v_n}{2}-v_n)=\dfrac{1}{4}(u_n-v_n)<0$ donc v_n est décroissante.

Il reste à montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n-v_n)=0$ or c'est justement la limite de w_n. Les suites (u_n) et (v_n) convergent donc vers la même limite (inconnue pour l'instant…).

4. a. $t_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}+2v_{n+1}}{3}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{u_n+v_n}{2}+2\dfrac{u_{n+1}+v_n}{2}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{u_n+v_n}{2}+\dfrac{u_n+v_n}{2}+v_n\right)=\dfrac{1}{3}(u_n+2v_n)=t_n$. On a donc $t_n=\dfrac{1}{3}(u_0+v_0)=\dfrac{7}{3}$.

b. Les suites (u_n) et (v_n) ont même limite l donc à l'infini, en remplaçant dans t_n : $\dfrac{7}{3}=\dfrac{1}{3}(l+2l)\Rightarrow l=\dfrac{7}{3}$.

5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

1. a. Démonstration de cours.

b. $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+ab-b^2=1\\a^2+ab-b^2=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a(a+b)-b\times b=1\\b(b-a)-a\times a=1\end{cases}$. Dans les deux cas on peut écrire $au+bv=1$: dans le premier $u=a+v,\ v=-b$, dans le second $u=b-a,\ v=-a$.

2. a. $a=b$: $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1\Leftrightarrow a^4=1\Rightarrow a=1$ ($a>0$).

b. (1 ; 1) est déjà fait, (2 ; 3) : $\left(2^2+2.3-3^2\right)^2=1$ et (5 ; 8) : $\left(5^2+5.8-8^2\right)^2=(25+40-64)^2=1$.

c. $a^2+ab-b^2=1$: si on a $a^2-b^2>0$, alors a^2+ab-b^2 ne peut pas valoir 1 ; de même a^2+ab-b^2 ne peut valoir −1 dans ce cas puisqu'il serait positif. Dans tous les cas on a $a^2-b^2<0$.

3. a. $(y-x\,;x)$ est une solution ssi $(x\,;y)$ est une solution :

$\left((y-x)^2+(y-x)x-x^2\right)^2=\left(y^2-2xy+x^2+xy-x^2-x^2\right)^2=\left(y^2-xy+x^2\right)^2=1$;

Même calcul pour $(y\,;y+x)$.

b. (2 ; 3) est solution donc $(3-2\,;2)=(1\,;2)$ et $(3\,;3+2)=(3\,;5)$ en sont ; (5 ; 8) est solution donc $(8-5\,;5)=(3\,;5)$ et $(8\,;5+8)=(8\,;13)$ en sont ; on a les nouvelles solutions : $(1\,;2)$, $(3\,;5)$ et $(8\,;13)$.

4. $a_0=a_1=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. Démonstration par récurrence : supposons que $(a_n\,;a_{n+1})$ est solution, alors $(y\,;y+x)=(a_{n+1}\,;a_n+a_{n+1})=(a_{n+1}\,;a_{n+2})$ est solution d'après le 3. a. Comme c'est vrai au rang 0 : (1 ; 1) est solution, c'est toujours vrai.

La question 1. b. justifie alors que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Remarque : ce n'est pas la façon la plus rapide de montrer que deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux : soient u_{n+1} et u_n deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci.
Alors $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$; soit d un diviseur commun positif de u_{n+1} et u_n ; alors d divise u_{n-1}, donc d est un diviseur commun de u_n et u_{n-1}.
En itérant (et en descendant), il vient : d est un diviseur commun de $u_1=1$ et $u_0=1$ donc $d=1$ et u_{n+1} et u_n sont premiers entre eux.