Nouvelle-Calédonie

1. Exercice 1 (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère l'application *f* du plan dans lui-même qui, à tout point *M* d'affixe *z* associe le point *M*' d'affixe *z*' telle que :

$$z' = z^2 - 4z\,.$$

1. Soient *A* et *B* les points d'affixes $z_A = 1 - i$ et $z_B = 3 + i$.

a. Calculer les affixes des points *A*' et *B*' images des points *A* et *B* par *f*.

b. On suppose que deux points ont la même image par *f*. Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.

2. Soit *I* le point d'affixe −3.

a. Démontrer que *OMIM*' est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 3z + 3 = 0$.

b. Résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.

3. a. Exprimer $(z' + 4)$ en fonction de $(z - 2)$. En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ puis entre $\arg(z' + 4)$ et $\arg(z - 2)$.

b. On considère les points *J* et *K* d'affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$. Démontrer que tous les points *M* du cercle (C) de centre *J* et de rayon 2 ont leur image *M*' sur un cercle que l'on déterminera.

c. Soit *E* le point d'affixe $z_E = -4 - 3i$. Donner la forme trigonométrique de $z_E + 4$ et démontrer à l'aide du 3. a. qu'il existe deux points dont l'image par *f* est le point *E*. Préciser sous forme algébrique les affixes de ces deux points.

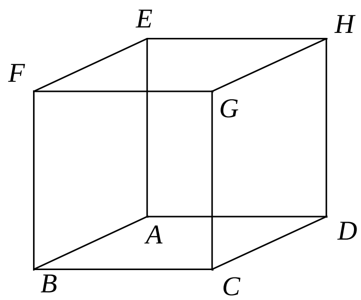
2. Exercice 2 (5 points)

Cet exercice est un Q.C.M. Pour chacune des cinq questions une ou plusieurs réponses sont exactes.

Le candidat doit inscrire V (vrai) ou F (faux) dans la case correspondante.

Aucune justification n'est demandée.

Pour chaque question 3 réponses correctes rapportent 1 point, 2 réponses correctes rapportent 0,5 point.



Soit *ABCDEFGH* un cube de côté 1. On choisit le repère orthonormal $\left(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$. On appelle *I* et *J* les milieux respectifs des segments [*EF*] et [*FG*]. *L* est le barycentre de {(*A* ; 1), (*B* ; 3)}. Soit (P) le plan d'équation $4x - 4y + 3z - 3 = 0$.

1. Les coordonnées de *L* sont :

Propositions	a. $\left(\frac{1}{3};0;0\right)$	b. $\left(\frac{3}{4};0;0\right)$	c. $\left(\frac{2}{3};0;0\right)$
Réponses			

2. Le plan (P) est le plan :

Propositions	a. (*GLE*)	b. (*LEJ*)	c. (*GFA*)
Réponses			

3. Le plan parallèle au plan (P) passant par *I* coupe la droite (*FB*) en *M* de coordonnées :

Propositions	a. $\left(1;0;\frac{1}{4}\right)$	b. $\left(1;0;\frac{1}{5}\right)$	c. $\left(1;0;\frac{1}{3}\right)$
Réponses			

4.

Propositions	a. Les droites (*EL*) et (*FB*) sont sécantes en un point *N* qui est le symétrique de *M* par rapport à *B*.	b. Les droites (*EL*) et (*IM*) sont parallèles.	c. b. Les droites (*EL*) et (*IM*) sont sécantes.
Réponses			

5. Le volume du tétraèdre *FIJM* est :

Propositions	a. $\frac{1}{36}$	b. $\frac{1}{48}$	c. $\frac{1}{24}$
Réponses			

3. Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x}{e^x-x}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x-x-1$.

1. Etudier les variations de la fonction *g* sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de *g*.

2. Justifier que pour tout *x*, $e^x-x>0$.

Partie B

1. a. Calculer les limites de la fonction *f* en $+\infty$ et $-\infty$.

b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. a. Calculer $f'(x)$, *f* désignant la fonction dérivée de *f*.

b. Etudier le sens de variation de *f* puis dresser son tableau de variation.

3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

b. A l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

4. Tracer la droite (T), les asymptotes et la courbe (C).

4. *Exercice 4 (5 points, non spécialistes)*

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel *n*, par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}.$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2, v_2.

2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel *n* par $w_n = v_n - u_n$.

a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

b. Exprimer w_n en fonction de *n* et préciser la limite de la suite (w_n).

3. Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

4. On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel *n*, par $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.

a. Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

5. *Exercice 4 (5 points, spécialistes)*

Dans cet exercice *a* et *b* désignent des entiers strictement positifs.

1. a. Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs *u* et *v* tels que $au + bv = 1$ alors les nombres *a* et *b* sont premiers entre eux.

b. En déduire que si $\left(a^2 + ab - b^2\right)^2 = 1$ alors *a* et *b* sont premiers entre eux.

2. On se propose de déterminer tous les couples d'entiers strictement positifs (*a* ; *b*) tels que $\left(a^2 + ab - b^2\right)^2 = 1$. Un tel couple sera appelé solution.

a. Déterminer *a* lorsque *a* = *b*.

b. Vérifier que (1 ; 1), (2 ; 3) et (5 ; 8) sont trois solutions particulières.

c. Montrer que si (*a* ; *b*) est solution et si $a < b$, alors $a^2 - b^2 < 0$.

3. a. Montrer que si (*x* ; *y*) est une solution différente de (1 ; 1) alors $(y - x\,;\,x)$ et $(y\,;\,y + x)$ sont aussi des solutions.

b. Déduire de 2. b. trois nouvelles solutions.

4. On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout entier *n*, $n \geq 0$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 0$, $(a_n\,;\,a_{n+1})$ est solution. En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.