Baccalauréat **Correction** **Pondichéry**

1. Exercice 1 (4 points)

$f(t)=\frac{e^t}{t}$.

1. a. f est continue sur $[1\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues.

b. $f'(t)=\frac{e^t t-e^t}{t^2}=\frac{e^t(t-1)}{t^2}$; e^t et t^2 sont évidemment positifs, $t-1$ l'est également lorsque $t\geq 1$. Donc f est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

2. **Restitution organisée de connaissances**

a. $A(1)$ vaut 0.

b. Sur $[1\,;+\infty[$ f est croissante ainsi que A. La différence $A(x_0+h)-A(x_0)$ représente l'aire de la bande sous la courbe de f, comprise entre les droites $x=x_0$ et $x=x_0+h$: cette bande a une aire supérieure à celle du rectangle de hauteur $f(x_0)$ et de largeur h, et inférieure à celle du rectangle de hauteur $f(x_0+h)$ et de largeur h. On a donc

$$hf(x_0)\leq A(x_0+h)-A(x_0)\leq f(x_0+h)h$$

d'où l'encadrement demandé en divisant par h puisque h est positif.

c. Si on prend $h<0$, ça ne change pas grand-chose sur le fond, il y a surtout des questions de signes à respecter : la bande sous la courbe de f a pour aire $A(x_0)-A(x_0+h)$, le rectangle inférieur a pour aire $f(x_0+h)(-h)$ et le rectangle supérieur a pour aire $f(x_0)(-h)$; on a donc

$(-h)f(x_0+h)\leq A(x_0)-A(x_0+h)\leq(-h)f(x_0)\Leftrightarrow hf(x_0+h)\leq A(x_0+h)-A(x_0)\leq hf(x_0)$, soit

$$f(x_0+h)\geq\frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}\geq f(x_0)$$

en divisant par h (attention au changement de sens des inégalités : h est négatif).

d. On a le même encadrement pour h positif ou négatif, on peut passer à la limite lorsque h tend vers 0, ce qui donne $f(x_0)\geq\lim\limits_{h\to 0}\frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}\geq f(x_0)\Rightarrow A'(x_0)=f(x_0)$ puisqu'on retrouve le nombre dérivé de A au milieu de l'encadrement.

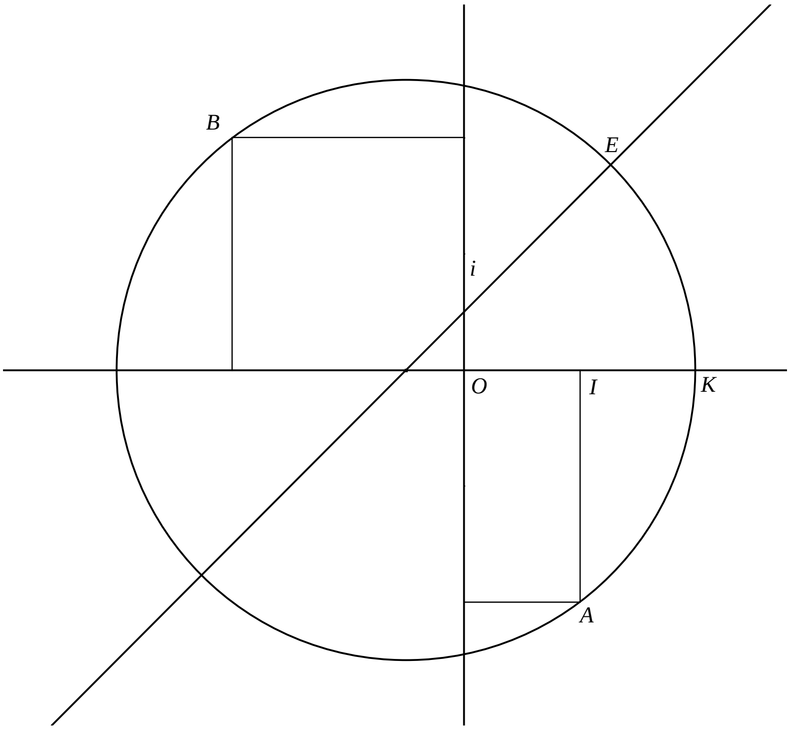
e. Conclusion du cours : l'aire sous la courbe de f entre $x=1$ et $x=x_0$ est obtenue en trouvant une primitive de f (la fonction A) telle que $A(1)=0$.

2. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

1. Ω a pour affixe $\frac{1-2i-2+2i}{2}=-\frac{1}{2}$; le rayon du cercle est $\frac{1}{2}\left|-2+2i-1+2i\right|=\frac{1}{2}\sqrt{9+16}=\frac{5}{2}$.

2. $z_D=\frac{3+9i}{4+2i}=\frac{(3+9i)(4-2i)}{16+4}=\frac{12+36i-6i+18}{20}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$.

D est un point du cercle (C) si $\left|z_D-z_\Omega\right|=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\left|\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{1}{2}\right|=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\sqrt{4+\frac{9}{4}}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$. Ok !



3. a. $\left(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega E}\right) = \frac{\pi}{4}(2\pi)$ donc $\arg \frac{z_E - z_\Omega}{z_I - z_\Omega} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \arg\left(z_E + \frac{1}{2}\right) - \arg\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \arg\left(z_E + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ car $\arg\left(\frac{3}{2}\right) = 0$. Par ailleurs E est sur (C) donc $\left|z_E + \frac{1}{2}\right| = \frac{5}{2}$.

b. On a donc $z_E + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow z_E = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + i\frac{5\sqrt{2}}{4}$.

4. a. $z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z + \frac{1}{2}\right)$ est la définition d'une rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

b. $z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(2 + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow z' = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow z' = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + i\frac{5\sqrt{2}}{2}$. L'image de

L'image de K par r est donc E : K est le point d'intersection entre (C) et (Ox), donc son image est le point E.

3. Exercice 2 (5 points, spécialistes)

.

1. $z' = \frac{3+4i}{5}\bar{z} + \frac{1-2i}{5} \Leftrightarrow x' + iy' = \frac{3+4i}{5}(x - iy) + \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5}(3x + 4y + 1) + i\frac{1}{5}(4x - 3y - 2)$

d'où par identification : $\begin{cases} x' = \dfrac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \dfrac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$.

2. a. Avec $\begin{cases} x' = \dfrac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \dfrac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$, on a les points invariants avec le système suivant :

$$\begin{cases} x=\dfrac{3x+4y+1}{5} \\ y=\dfrac{4x-3y-2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-3x-4y-1=0 \\ 5y-4x+3y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y-1=0 \\ -4x+8y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y-1=0 \\ 2x-4y-1=0 \end{cases}.$$

Les points invariants forment donc la droite Δ d'équation $2x-4y-1=0$.

b. *f* est donc une réflexion par rapport à l'axe Δ.

3. *z'* est réel si $y'=0 \Leftrightarrow 4x-3y-2=0$; encore une droite.

4. a. Une solution particulière $(x_0\ ;y_0)$ dans $\mathbb{Z}^2$ de $4x-3y=2$ est (2 ; 2) de manière évidente.

b. On a donc $\begin{cases} 4x-3y=2 \\ 4.2-3.2=2 \end{cases} \Rightarrow 4(x-2)-3(y-2)=0 \Leftrightarrow 4(x-2)=3(y-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=3k \\ y-2=4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+3k \\ y=2+4k \end{cases}, k\in\mathbb{Z}$.

5. $M:\ z=1+iy\quad y\in\mathbb{R}\ :\ \begin{cases} x'=\dfrac{3+4y+1}{5}=\dfrac{4+4y}{5} \\ y'=\dfrac{4-3y-2}{5}=\dfrac{2-3y}{5} \end{cases}$;

$$\begin{cases} x'\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 4+4y=5p \\ y'\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 2-3y=5q \end{cases} \Rightarrow 6+y=5(p+q) \Leftrightarrow y=-1+5(p+q-1) \Leftrightarrow y\equiv -1(5) \Leftrightarrow y\equiv 4(5).$$

Vérifions : si $y=4+5k$, alors $\begin{cases} x'=\dfrac{4+4(4+5k)}{5}=\dfrac{20+20k}{5}=4+4k \\ y'=\dfrac{2-3(4+5k)}{5}=\dfrac{2-12-15k}{5}=-2-3k \end{cases}$, ok !

4. Exercice 3 (5 points)

$A(1;0;2)$, $B(1;1;4)$ et $C(-1;1;1)$.

1. a. $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1-1\\1-0\\4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\quad \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1-1\\1-0\\1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$, ces vecteurs ne sont pas colinéaires :

$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=-2k \\ 1=k \\ 2=-k \end{cases}$ ... bof.

b. $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}=0+4-4=0$ et $\overrightarrow{AC}.\vec{n}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}=-6+4+2=0$. Le plan (*ABC*) a pour équation :

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y-0\\z-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow 3x-3+4y-2z+4=0 \Leftrightarrow 3x+4y-2z+1=0.$$

2. a. Quand on intersecte P_1 et P_2 on a le système suivant : $\begin{cases} 2x+y+2z+1=0 \\ x-2y+6z=0 \end{cases}$, soit en posant par exemple $z=t$: $\begin{cases} 2x+y=-2t-1 \\ x-2y=-6t \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y=10t-1 \\ x=2y-6t \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4t-2/5-6t=-2t-2/5 \\ y=2t-1/5 \\ z=t \end{cases}$.

On peut noter qu'un vecteur directeur de D est $\vec{u}=(-2\,;2\,;1)$.

b. D et (ABC) sont parallèles si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux : $\vec{n}.\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -6+8-2=0$; ils sont bien parallèles.

3. G barycentre des points A, B et C affectés des coefficients 1, 2 et t.

a. G existe si la somme des coefficients ici $3+t$ n'est pas nulle, ce qui est vrai pour tout réel positif t.

$I\left(\frac{1.1+2.1}{3}, \frac{1.0+2.1}{3}, \frac{1.2+2.4}{3}\right) = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$. G est donc le barycentre de $(I\,;3)$, $(C\,;t)$ d'où $\overrightarrow{IG} = \frac{t}{3+t}\overrightarrow{IC}$.

b. La fonction $f(t) = \frac{t}{3+t}$ a pour dérivée $f'(t) = \frac{1(3+t)-t.1}{(3+t)^2} = \frac{3}{(3+t)^2} > 0$ et est croissante ; en 0 elle vaut 0, en $+\infty$ elle vaut 1 (sa limite est 1 en $+\infty$).

Lorsque t parcourt les réels positifs, l'abscisse du point G dans le repère $(I, \overrightarrow{IC})$ est $f(t)$, donc cette abscisse varie entre 0 et 1, et G parcourt le segment $[IC]$ sauf le point C qui est à la limite (la limite n'est pas atteinte).

Le milieu J du segment $[IC]$ coïncide avec G lorsque $f(t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{t}{3+t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2t = 3+t \Leftrightarrow t=3$.

5. Exercice 4 (6 points)

$u_n = \frac{n^{10}}{2^n}$.

1. On remplace, on simplifie et on a ce qui est demandé :

$$u_{n+1} \le 0,95u_n \Leftrightarrow \frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}} \le 0,95\frac{n^{10}}{2^n} \Leftrightarrow \frac{(n+1)^{10}}{n^{10}} \le 0,95\frac{2^n.2}{2^n} \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10} \le 1,9 \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \le 1,9.$$

2. a. $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}$; $f'(x) = 10\left(1+\frac{1}{x}\right)'\left(1+\frac{1}{x}\right)^9 = 10\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^9 < 0$ donc f est décroissante ;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{10} = 1^{10} = 1$.

b. $f(1) = 2^{10}$ et f décroissante donc f est bijective de $[1\,;+\infty[$ vers $]1\,;2^{10}]$; comme 1,9 est dans cet intervalle, il existe bien un unique réel α tel que $f(\alpha) = 1,9$.

c. On a $f(15) \approx 1,9067$ et $f(16) \approx 1,8335$ d'où $16-1 = 15 \le \alpha \le 16$.

d. Lorsque $x \ge \alpha$, comme f est décroissante, on a : $f(x) \le f(\alpha) = 1,9$, donc pour tous les n tels que $n \ge 16 \ge \alpha$, on a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} = f(n) \le f(16) \le f(\alpha) = 1,9$.

3. a. D'aprèe ce que nous venons de dire, la suite (u_n) est telle que $u_{n+1} \le 0,95u_n$ à partir du rang 16 ; comme tous les termes sont évidemment positifs, la suite (u_n) est décroissante à prtir de ce rang.

b. Décroissante et minorée par 0 donc convergente.

4. $0 \le u_n \le 0,95^{n-16}u_{16}$: on vérifie facilement au rang 16 car $0 \le u_{16} \le u_{16}$; quand on passe au rang suivant, on a $u_{n+1} \le 0,95u_n \le 0,95.0,95^{n-16}u_{16} = 0,95^{(n+1)-16}u_{16}$, CQFD.

Comme $0,95 < 1$, $0,95^{n-16}$ tend vers 0 à l'infini ainsi que u_n grâce à nos amis les gendarmes.