Baccalauréat **Pondichéry**

1. Exercice 1 (4 points)

On considère la fonction *f*, définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{e^t}{t}$.

1. a. Justifier la continuité de *f* sur $[1\,;+\infty[$.

b. Montrer que *f* est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

2. **Restitution organisée de connaissances**
On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.
Pour tout réel x_0 de $[1\,;+\infty[$, on note $A(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant *f* dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=x_0$.

a. Que vaut $A(1)$?

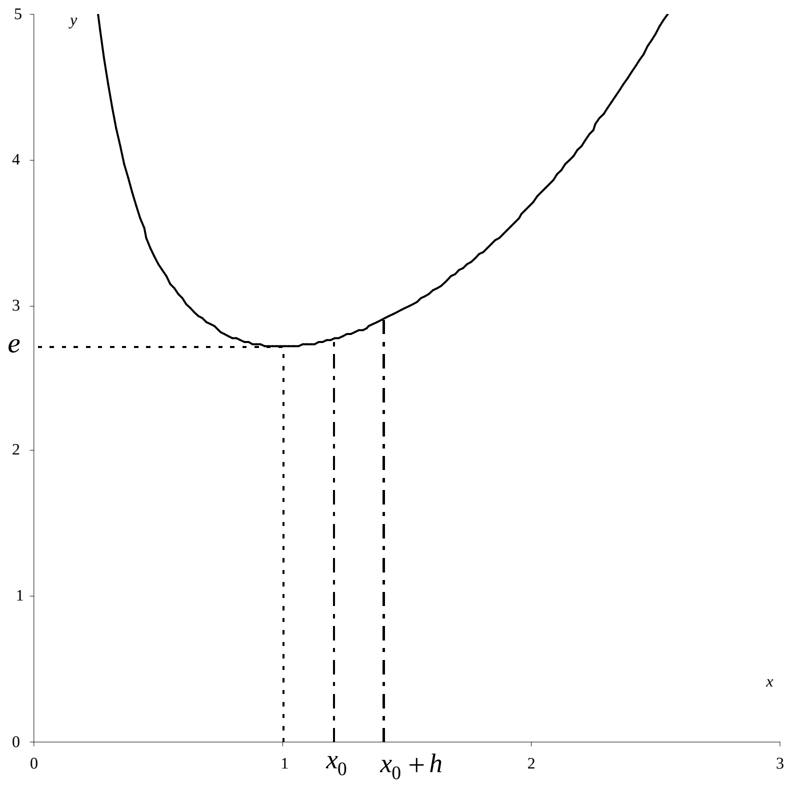
b. Soit x_0 un réel quelconque de $[1\,;+\infty[$ et h un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :

$$f(x_0)\le\frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}\le f(x_0+h).$$

c. Lorsque $x_0\ge 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h<0$ et tel que $x_0+h\ge 1$?

d. En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction *A* ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction *A*.

e. Conclure.



2. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On désigne par I le point d'affixe $z_I = 1$, par A le point d'affixe $z_A = 1-2i$, par B le point d'affixe $-2+2i$ et par (C) le cercle de diamètre [AB].

On fera une figure que l'on complètera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Déterminer le centre Ω du cercle (C) et calculer son rayon.

2. Soit D le point d'affixe $z_D = \dfrac{3+9i}{4+2i}$. Ecrire z_D sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle (C).

3. Sur le cercle (C), on considère le point E, d'affixe z_E, tel qu'une mesure en radians de $\left(\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega E}\right)$ est $\dfrac{\pi}{4}$.

a. Préciser le module et un argument de $z_E + \dfrac{1}{2}$.

b. En déduire que $z_E = \dfrac{5\sqrt{2}-2}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}i$.

4. Soit r l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' + \dfrac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z + \dfrac{1}{2}\right)$.

a. Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.

b. Soit K le point d'affixe $z_K = 2$. Déterminer par le calcul l'image de K par r. Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat.

3. Exercice 2 (5 points, spécialistes)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{3+4i}{5}\overline{z} + \dfrac{1-2i}{5}$.

1. On note x et x', y et y' les parties réelles et imaginaires de z et z'. Démontrer que $\begin{cases} x' = \dfrac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \dfrac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$.

2. a. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

b. Quelle est la nature de l'application f ?

3. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z' soit réel.

4. On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.

a. Donner une solution particulière $(x_0\,;y_0)$ appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$.

b. Déterminer l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$.

5. On considère les points M d'affixe $z = x+iy$ tels que $x=1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z'. Déterminer les entiers y tels que $\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z')$ soient entiers (on pourra utiliser les congruences modulo 5).

4. *Exercice 3 (5 points)*

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1\,;0\,;2)$, $(1\,;1\,;4)$ et $(-1\,;1\,;1)$.

1. a. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\,;4\,;-2)$. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soient P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $2x+y+2z+1=0$ et $x-2y+6z=0$.

a. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.

b. La droite D et le plan (ABC) sont-ils parallèles ?

3. Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients 1, 2 et t.

a. Justifier l'existence du point G pour tout réel positif t.

Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I.

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{IC}$.

b. Montrer que l'ensemble des points G lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment $[IC]$ privé du point C. Pour quelle valeur de t, le milieu J du segment $[IC]$ coïncide-t-il avec G ?

5. *Exercice 4 (6 points)*

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=\dfrac{n^{10}}{2^n}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'équivalence suivante :

$$u_{n+1}\leq 0{,}95u_n \text{ si et seulement si } \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}\leq 1{,}9\,.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$.

a. Etudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f.

b. Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha)=1{,}9$.

c. Déterminer l'entier naturel n_0 tel que $n_0-1\leq\alpha\leq n_0$.

d. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10}\leq 1{,}9$.

3. a. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.

b. Que peut-on en déduire pour la suite ?

4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, l'encadrement : $0\leq u_n\leq 0{,}95^{n-16}u_{16}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.