Antilles

1. Exercice 1 (5 points, non spécialistes)

$(O\,;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormal du plan P. Soit A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe −1.

Soit F l'application de P privé de O dans P qui à tout point M d'affixe z distinct de O associe le point $M' = F(M)$ d'affixe $z' = \dfrac{-1}{\overline{z}}$.

1. a. Soit E le point d'affixe $e^{i\frac{\pi}{3}}$; on appelle E' son image par F. Déterminer l'affixe de E' sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

b. On note C_1 le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de C_1 par l'application F.

2. a. Soit K le point d'affixe $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et K' l'image de K par F. Calculer l'affixe de K'.

b. Soit C_2 le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de C_2 par l'application F.

3. On désigne par R un point d'affixe $1+e^{i\theta}$ où $\theta \in \left]-\pi\,;+\pi\right[$. R appartient au cercle C_3 de centre A et de rayon 1.

a. Montrer que $z'+1 = \dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}}$. En déduire que : $|z'+1| = |z'|$.

b. Si on considère maintenant les points d'affixe $1+e^{i\theta}$, $\theta \in \left]-\pi\,;+\pi\right[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du 3. a.

2. Exercice 1 (5 points, spécialistes)

1. a. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.

b. Démontrer alors que $(2005)^{2005} \equiv 7(9)$.

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $((10)^n \equiv 1(9)$.

b. On désigne par N un entier naturel écrit en base dix, on appelle S la somme de ses chiffres. Démontrer la relation suivante : $N \equiv S(9)$.

c. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

3. On suppose que $A = (2005)^{2005}$; on désigne par :

– B la somme des chiffres de A ;
– C la somme des chiffres de B ;
– D la somme des chiffres de C.

a. Démontrer la relation suivante : $A \equiv D(9)$.

b. Sachant que 2005 < 10000, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres. En déduire que $B \leq 72180$.

c. Démontrer que $C \leq 45$.

d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.

e. Démontrer que $D = 7$.

3. Exercice 2 (6 points)

1. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de [0 ; 1] : $\frac{1}{n}-\frac{x}{n^2}\leq\frac{1}{x+n}\leq\frac{1}{n}$.

2. a. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{x+n}\,dx$.

b. Déduire en utilisant 1., que : pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\leq\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ puis que $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\leq\frac{1}{n}$.

3. On appelle U la suite définie pour $n\in\mathbb{N}^*$ par : $U(n)=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\ln(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln(n)$.

Démontrer que U est décroissante (on pourra utiliser 2. b.)

4. On désigne par V la suite de terme général : $V(n)=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$.

Démontrer que V est croissante.

5. Démontrer que U et V convergent vers une limite commune notée γ. Déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près par la méthode de votre choix.

4. Exercice 3 (3 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions ; chacune comporte trois réponses, une seule est exacte. On notera sur la copie uniquement la lettre correspondant â la réponse choisie.

Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies.

40% des écrivains de romans policiers sont français et 70% des écrivains de biographies sont français. Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :

a. 0,4 b. 0,75 c. $\frac{1}{150}$.

2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :

a. 0,3 b. 0,8 c. 0,4

3. La probabilité que Ie lecteur choisisse un roman policier français est :

a. 1,15 b. 0,4 c. 0,3

4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :

a. 0,9 b. 0,7 c. 0,475

5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :

a. $\frac{4}{150}$ b. $\frac{12}{19}$ c. 0,3

6. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque. La probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :

a. $1-(0{,}25)^{20}$ b. $20\times0{,}75$ c. $0{,}75\times(0{,}25)^{20}$

5. Exercice 4 (6 points)

A. Soit [KL] un segment de l'espace ; on note I son milieu. On appelle plan médiateur de [KL] le plan perpendiculaire en I à la droite (KL).

Démontrer que le plan médiateur de [KL] est l'ensemble des points de l'espace équidistants de K et L.

B. Ici l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$; on considère les points

$$A(4\,;\,0\,;\,-3),\ B(2\,;\,2\,;\,2),\ C(3\,;\,-3\,;\,-1),\ D(0\,;\,0\,;\,-3).$$

1. Démontrer que le plan médiateur de $[AB]$ a pour équation

$$4x - 4y - 10z - 13 = 0.$$

On admet pour la suite que les plans médiateurs de $[BC]$ et $[CD]$ ont respectivement pour équations

$$2x - 10y - 6z - 7 = 0 \text{ et } 3x - 3y + 2z - 5 = 0.$$

2. Démontrer, en résolvant un système d'équations linéaires, que ces trois plans ont un unique point commun E dont on donnera les coordonnées.

3. En utilisant la partie A montrer que les points A, B, C et D sont sur une sphère de centre E. Quel est le rayon de cette sphère ?