National Correction

Quelques commentaires en italique viennent ponctuer cette correction. Le sujet est assez bien équilibré ; contrairement aux années précédentes tout est à l'intérieur du programme et les difficultés sont assez progressives. Un élève moyen doit s'en tirer correctement dans l'ensemble.

1. Exercice 1 (4 points)

PARTIE A : « Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

On a $u_n \leq v_n$ et (v_n) décroissante donc $u_n \leq v_n \leq \ldots \leq v_0$ d'où (u_n) est majorée et converge vers l ; même chose pour (v_n) qui est décroissante et minorée par u_0 et converge vers l'.

Comme $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on a $l - l' = 0 \Rightarrow l = l'$.

Pour une première ROC la difficulté est raisonnable… Inutile de raconter sa vie non plus !

PARTIE B (u_n) non nulle, $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente :

Faux : n'importe quelle suite convergente vers 0 ne marche pas, prendre par exemple $1/n$.

2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1 :

Vrai : $2 \leq u_n \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{u_n} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{u_n} \Rightarrow -\frac{2}{2} \leq -\frac{2}{u_n} \Rightarrow -1 \leq v_n$.

3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante :

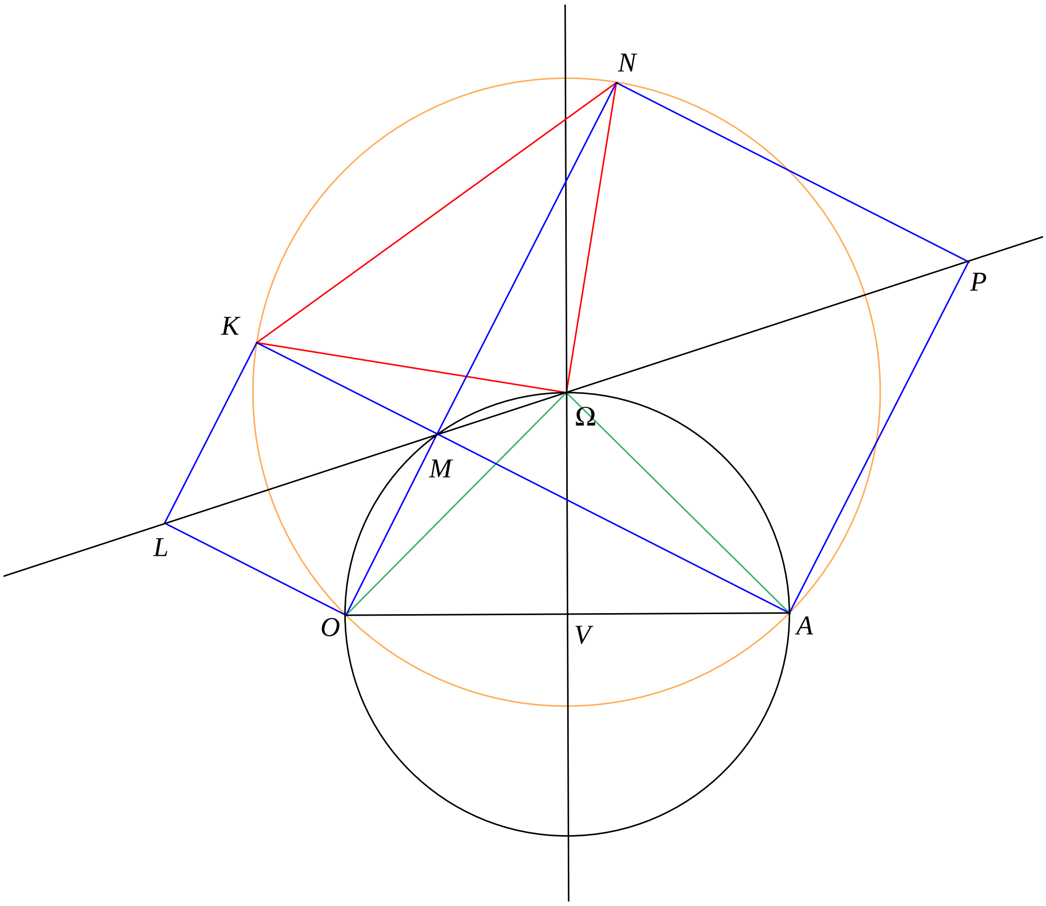
Faux ; $v_{n+1} - v_n = \frac{-2}{u_{n+1}} - \frac{-2}{u_n} = \frac{-2(u_n - u_{n+1})}{u_n u_{n+1}}$; si (u_n) est décroissante, $u_{n+1} \leq u_n \Rightarrow 0 \leq u_n - u_{n+1}$, le numérateur est négatif, si le dénominateur est positif, soit lorsque la suite (u_n) n'a que des termes positifs, (v_n) est décroissante.

4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

Faux : une suite peut être divergente sans tendre vers l'infini, par exemple $u_n = (-1)^n$ diverge, de même évidemment que v_n .

Dans l'ensemble les questions ne sont pas trop compliquées, la fabrication de contre-exemples est une bonne activité qui permet la compréhension des phénomènes en jeu. Il est vrai que ne pas connaître les réponses est déstabilisant, mais les correcteurs feront certainement preuve de compréhension.

2. Exercice 2 (points)



1. Le centre du cercle a pour affixe $\frac{1}{2}$, le rayon est $\frac{1}{2}$, on a donc $\left|m-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.

2. *L* est l'image de *M* par la rotation de centre *O*, d'angle $\frac{\pi}{2}$, on a donc $l=im$; de même *P* est l'image de *M* par la rotation de centre *A*, d'angle $-\frac{\pi}{2}$, on a donc $p-1=e^{-i\frac{\pi}{2}}(m-1) \Leftrightarrow p=-i(m-1)+1=-im+i+1$.

De la même manière on a $n=(1-i)m+i$ et $k=(1+i)m$.

3. a. Ω a pour affixe $\frac{p+l}{2}=\frac{-im+1+i+im}{2}=\frac{1+i}{2}$; comme *m* n'apparaît plus, Ω ne dépend pas de *M*.

b. On a évidemment $\left|\frac{1+i}{2}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}$ donc Ω appartient au cercle C. Ω est à l'intersection de C et de la médiatrice de [*OA*].

4. a. La symétrie de la figure par rapport à la droite (*LMP*) montre que $KN=OA=1$. Par le calcul on a $KN=\left|n-k\right|=\left|(1-i)m+i-(1+i)m\right|=\left|i-2mi\right|=\left|2i\right|\left|\frac{1}{2}-m\right|=2.\frac{1}{2}=1$.

Il est inutile de faire le calcul…

b. Pour la même raison de symétrie, ΩNK est l'image de ΩOA et est donc isocèle rectangle.

Ce coup-ci on ne fait pas le calcul…

5. Puisque ΩNK est isocèle rectangle, son côté est $\frac{1}{\sqrt{2}}KN=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\Omega N=\frac{\sqrt{2}}{2}$, N parcourt un cercle de centre Ω de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

La dernière question est assez pénible si on utilise le calcul, voir http://perso.wanadoo.fr/gilles.costantini/Lycee_fichiers/BAC/BACS2005.pdf ou http://www.sesabac.net

3. Exercice 3 (points)

Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

1. Il choisit simultanément trois billes au hasard : il y a 13 billes dans cette boîte, il y a donc $\binom{13}{3}=\frac{13.12.11}{3.2.1}=286$ choix possibles.

Comme il y a 10 rouges, il peut prendre 0, 1, 2 ou 3 billes rouges : ce sont les valeurs que peut prendre X

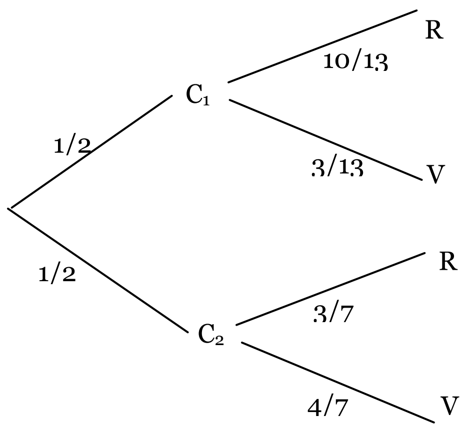
a. Si on tire k rouges, on tire 3−k vertes : on a $p(X=k)=\frac{\binom{10}{k}\binom{3}{3-k}}{286}$. On calcule pour les différentes valeurs de k :

X	0	1	2	3
p_X	$\frac{\binom{10}{0}\binom{3}{3}}{286}=\frac{1}{286}\approx 0,003$	$\frac{\binom{10}{1}\binom{3}{2}}{286}=\frac{30}{286}\approx 0,104$	$\frac{\binom{10}{2}\binom{3}{1}}{286}=\frac{135}{286}\approx 0,472$	$\frac{\binom{10}{3}\binom{3}{0}}{286}=\frac{120}{286}\approx 0,419$

b. $\mathrm{E}(X)=0.\frac{1}{286}+1.\frac{30}{286}+2.\frac{135}{286}+3.\frac{120}{286}=\frac{660}{286}\approx 2,307$.

Ce type de loi n'est assez peu utilisée sous cette forme car les coefficients binomiaux deviennent ingérables dès que le nombre d'objets présents est trop important. Ca faisait longtemps qu'on n'en avait pas vu au Bac…

2. a.



b. $p(\mathrm{R})=p(\mathrm{R}\cap \mathrm{C}_1)+p(\mathrm{R}\cap \mathrm{C}_2)=p_{\mathrm{C}_1}(\mathrm{R})p(\mathrm{C}_1)+p_{\mathrm{C}_2}(\mathrm{R})p(\mathrm{C}_2)=\frac{10}{13}.\frac{1}{2}+\frac{3}{7}.\frac{1}{2}=\frac{70+39}{182}=\frac{109}{182}\approx 0,599$.

Probabilités totales.

c. $p_R(\mathrm{C}_1)=\frac{p(\mathrm{C}_1\cap \mathrm{R})}{p(\mathrm{R})}=\frac{5/13}{109/182}=\frac{5}{13}.\frac{13.7.2}{109}=\frac{70}{109}\approx 0,642$

3. Loi binomiale : n inconnu, p = probabilité de tirer une rouge.

a. $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{109}{182}\right)^0\left(\frac{73}{182}\right)^n = 1 - \left(\frac{73}{182}\right)^n$.

b. $p_n \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{73}{182}\right)^n \geq 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{73}{182}\right)^n \leq 0,01 \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{73}{182}\right) \leq \ln 0,01 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln\left(\frac{73}{182}\right)} \approx 5,04$; il faut donc que $n \geq 6$.

Questions ultra classiques, attention aux changements de sens dans les inégalités (ln(73/182) <0 car…).

4. Exercice 4 (points)

PARTIE A $f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}$.

a. On multiplie en haut et en bas par $e^{-\frac{x}{4}}$: $f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}e^{-\frac{x}{4}}}{e^{-\frac{x}{4}}\left(2 + e^{\frac{x}{4}}\right)} = \frac{3}{2e^{-\frac{x}{4}} + 1}$.

b. Lorsque x tend vers $+\infty$, $e^{-\frac{x}{4}}$ tend vers 0 donc f tend vers $\frac{3}{0+1} = 3$; lorsque x tend vers $-\infty$, $e^{-\frac{x}{4}}$ tend vers $+\infty$ donc f tend vers 0.

Limites vraiment simples en utilisant la deuxième forme de f.

c. On peut remarquer que $e^{-\frac{x}{4}}$ est décroissante et que la fonction inverse l'est également ; on a alors une fonction croissante : $a \leq b \Rightarrow e^{-\frac{a}{4}} \geq e^{-\frac{b}{4}} \Rightarrow 2e^{-\frac{a}{4}} + 1 \geq 2e^{-\frac{b}{4}} + 1 \Rightarrow \frac{3}{2e^{-\frac{a}{4}} + 1} \leq \frac{3}{2e^{-\frac{b}{4}} + 1} \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.

Avec la dérivée : $f'(x) = 3\frac{-\left(1 + 2e^{-\frac{x}{4}}\right)'}{\left(1 + 2e^{-\frac{x}{4}}\right)^2} = 3\frac{-\left(-2\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}\right)}{\left(1 + 2e^{-\frac{x}{4}}\right)^2} = 3\frac{\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{4}}}{\left(1 + 2e^{-\frac{x}{4}}\right)^2} > 0$.

Attention à bien utiliser la dérivée de 1/u, soit –u'/u².

PARTIE B

1. a. $y' = \frac{y}{4}$ a pour solutions $y = Ce^{\frac{1}{4}t}$.

b. Avec $g(0) = 1$ on a $y(0) = Ce^{\frac{1}{4}0} = C = 1$ d'où $g(t) = e^{\frac{1}{4}t}$.

c. $g(t) = e^{\frac{1}{4}t} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{4}t \geq \ln 3 \Leftrightarrow t \geq 4\ln 3 \approx 4,4$ d'où environ 4 ans et 5 mois. Après 5 années on est sûr que la population dépassera les 300 individus.

Cette première partie ne présente pas de difficulté. Attention aux unités quand même.

2. (E$_2$) : $\begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{u(t)^2}{12} \\ u(0) = 1 \end{cases}$

a. $h = \dfrac{1}{u} \Rightarrow h' = -\dfrac{u'}{u^2}$. Or le système (E$_2$) devient en divisant par u^2 : $\begin{cases} \dfrac{u'(t)}{u^2(t)} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{u(t)} - \dfrac{1}{12} \\ u(0) = 1 \end{cases}$, soit

$\begin{cases} h'(t) = \dfrac{1}{4}h(t) - \dfrac{1}{12} \\ h(0) = \dfrac{1}{u(0)} = 1 \end{cases}$.

b. $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ a pour solutions $y = Ce^{-\frac{1}{4}t} - \dfrac{1/12}{-1/4} = Ce^{-\frac{1}{4}t} + \dfrac{1}{3}$. On a donc $h(t) = Ce^{-\frac{1}{4}t} + \dfrac{1}{3}$ et avec $h(0) = 1$, on tire $C + \dfrac{1}{3} = 1 \Rightarrow C = \dfrac{2}{3}$. La solution u est donc $u(t) = \dfrac{1}{h(t)} = \dfrac{1}{\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2e^{-\frac{1}{4}t} + 1}$, où l'on retrouve la fonction de la partie A.

c. Lorsque t tend vers $+\infty$ u se comporte comme f et tend vers 3, la population de rongeurs se stabilise donc vers 300 individus.

*Le modèle ici présenté est classique et avait été donné sous une forme différente (et plus compliquée) en 2003. L'équation différentielle initiale provient du mécanisme suivant : on a $u'(t) = \dfrac{1}{12}u(t)\left(3 - u(t)\right)$, la population croit, donc u est positif et inférieur à 3 ; le terme $\dfrac{3}{12}u$ est la croissance exponentielle de la population, le terme $3 - u(t)$ tend vers 0 donc u tend vers 3. C'est l'*équation logistique *que l'on retrouve dans d'autre situations physiques (comme des réactions chimiques).*