La Réunion

1. Exercice 1 (4 points)

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes et sont notées sur un point chacune.

Pour chaque question, il y a exactement deux propositions correctes. Le candidat doit indiquer sur sa copie les deux propositions vraies. Aucune justification n'est demandée.

Chaque réponse exacte rapporte 0,5 point, chaque réponse fausse enlève 0,25 point. Donner trois propositions ou plus d'une question, ou bien n'en donner aucune, ne rapporte aucun point. Si, par application de ce barème, le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à zéro.

1. Les suites suivantes sont convergentes :

a. $\left(\dfrac{2^n}{n^{2005}}\right)_{n>0}$ b. $\left(\dfrac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ c. $\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)_{n>0}$ d. $\left(\dfrac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)_{n>1}$

2. On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) ayant, pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes :

$u_n \le v_n \le w_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = -1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n) = 1$.

Alors :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = 0$.

b. La suite (u_n) est minorée.

c. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $-1 \le v_n \le 1$.

d. On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.

3. Une suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1,5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

a. La suite (u_n) converge vers 1, abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = 2x - 1$.

b. La suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$, est géométrique.

c. La suite (v_n) est majorée.

d. La suite (w_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln(u_n - 1)$, est arithmétique.

4. Deux suites (x_n) et (y_n) sont définies pour $n > 0$ par les relations :

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \text{ et } y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

a. Les suites (x_n) et (y_n) sont toutes les deux croissantes.

b. $x_3 = \dfrac{19}{20}$ et $y_3 = \dfrac{37}{60}$.

c. Les suites (x_n) et (y_n) ne sont pas majorées.

d. Les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

2. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

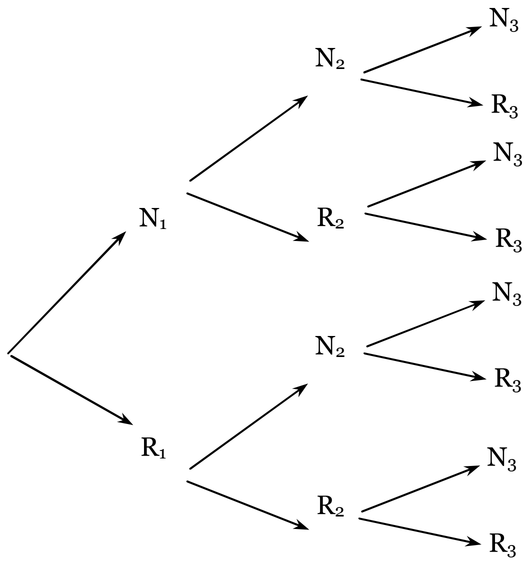
On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3.

L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2, à les mettre dans U_3, puis à tirer au hasard une boule de U_3. Pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i, (respectivement R_i) l'évènement

« on tire une boule noire de l'urne U_i » (respectivement « on tire une boule rouge de l'urneU_i »).

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant



2. a. Calculer la probabilité des évènements $N_1 \cap N_2 \cap N_3$, et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$.

b. En déduire la probabilité de l'évènement $N_1 \cap N_3$.

c. Calculer de façon analogue la probabilité de l'évènement $R_1 \cap N_3$.

3. Déduire de la question précédente la probabilité de l'évènement N_3.

4. Les évènements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?

5. Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

3. Exercice 2 (5 points, spécialistes)

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :

« Étant donnés deux entiers naturels a et b non nuls, si PGCD(a ; b) = 1 alors PGCD(a^2 ; b^2) = 1 ».

Une suite (S_n) est définie pour $n > 0$ par $S_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$. On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1}.

1. Démontrer que, pour tout $n > 0$, on a : $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2. Étude du cas où n est pair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k$.

a. Démontrer que $\text{PGCD}(S_{2k} ; S_{2k+1}) = (2k+1)^2 \text{ PGCD}(k^2 ; (k+1)^2)$.

b. Calculer PGCD (k ; k +1).

c. Calculer PGCD(S_{2k} ; S_{2k+1}).

3. Étude du cas où n est impair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k + 1$.

a. Démontrer que les entiers $2k + 1$ et $2k + 3$ sont premiers entre eux.

b. Calculer PGCD(S_{2k+1} ; S_{2k+2}).

4. Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

4. Exercice 3 (4 points)

On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(C)\begin{cases} f(-x)f'(x)=1 \text{ pour tout nombre réel } x, \\ f(0)=-4 \end{cases}$$

(où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f) et de trouver cette fonction.

1. On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(-x)f(x)$.

a. Démontrer que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer la fonction dérivée de la fonction g.

c. En déduire que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.

d. On considère l'équation différentielle (E) $y'=\frac{1}{16}y$. Montrer que la fonction f est solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0)=-4$.

2. **Question de cours :**

a. On sait que la fonction $x \to e^{\frac{x}{16}}$ est solution de l'équation différentielle (E). Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $x \to Ke^{\frac{x}{16}}$, où K est un nombre réel quelconque.

b. Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0.

3. Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C) et préciser quelle est cette fonction.

5. Exercice 4 (4 points)

On appelle hauteur d'un tétraèdre toute droite contenant l'un des sommets de ce tétraèdre et perpendiculaire au plan de la face opposée à ce sommet. Un tétraèdre est *orthocentrique* si ses quatre hauteurs sont concourantes.

Partie A

On considère un tétraèdre $ABCD$ et on note H le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

Démontrer que, si les hauteurs du tétraèdre $ABCD$ issues des points A et B sont concourantes, alors la droite (BH) est une hauteur du triangle BCD.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on donne les points $A(3\,;\,2\,;\,-1)$, $B(-6\,;\,1\,;\,1)$, $C(4\,;-3\,;\,3)$ et $D(-1\,;\,-5\,;\,-1)$.

1. a. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est : $-2x -3y +4z -13 = 0$.

b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CD}$.

d. Le tétraèdre $ABCD$ est-il orthocentrique ?

2. On définit les points $I(1\,;\,0\,;\,0)$, $J(0;\,1;\,0)$, $K(0\,;\,0\,;\,1)$. Le tétraèdre $OIJK$ est-il orthocentrique ?

6. Exercice 5 (3 points)

L'exercice comporte une annexe à rendre avec la copie.

On considère les fonctions f et g définies, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty\,[$, par $f(x) = \ln(x+1)$ et $g(x)=e^x-1$. On désigne par C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormal

$(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Ces courbes sont tracées sur la feuille annexe, dont le candidat disposera comme il le jugera utile ; cette annexe sera à joindre à la copie, avec les éventuels ajouts effectués par le candidat,

1. Vérifier que les courbes C_f et C_g ont une tangente commune au point $O(0\,;\,0)$. Préciser la position de la courbe C_f par rapport à cette tangente.

2. Démontrer que les courbes C_f et C_g sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3. Soit a un nombre réel strictement positif. On se propose de calculer de deux façons différentes le nombre $I(a)=\int_0^a \ln(x+1)dx$.

a. En utilisant des considérations d'aires, démontrer que $I(a)=a\ln(a+1)-\int_0^{\ln(a+1)}(e^x-1)dx$.

b. En déduire la valeur de $I\,(a)$.

c. Retrouver la valeur de $I\,(a)$ en effectuant une intégration par parties.

Courbes de l'exercice 5