Baccalauréat remplacement **Correction** **Nouvelle Calédonie**

1. Exercice 1 (4 points)

Q1	Pour tout n entier naturel non nul, pour tout réel θ, $\left(e^{i\theta}\right)^n$ est égal à :	$e^{in\theta}$	Vrai : cours.
		$\cos\left(\theta^n\right)+i\sin\left(\theta^n\right)$	Faux : bof...
		$\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$	Vrai : cours.
Q2	La partie imaginaire du nombre z est égale à :	$\dfrac{z+\overline{z}}{2}$	Faux : $\dfrac{z+\overline{z}}{2}=\dfrac{1}{2}(x+iy+x-iy)=x$.
		$\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$	Vrai :on a $\sin\theta=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}=y$.
		$\dfrac{z-\overline{z}}{2}$	Faux : $\dfrac{z-\overline{z}}{2}=\dfrac{1}{2}(x+iy-x+iy)=iy$.
Q3	Si z est un imaginaire pur, alors $\lvert z\rvert^2$ est égal à :	y^2	Vrai : $\lvert z\rvert^2=\lvert iy\rvert^2=\lvert i\rvert^2\lvert y\rvert^2=y^2$.
		$-y^2$	Faux : $\lvert i\rvert^2=1\neq i^2=-1$.
		$-z^2$	Vrai : comme z est imaginaire pur, on a $\lvert z\rvert^2=\lvert iy\rvert^2=y^2$ et $-z^2=-(iy)^2=y^2$.
Q4	A, B et C sont des points d'affixes respectives a, b et c telles que $\dfrac{b-a}{c-a}=i\sqrt{3}$, alors :	$BC=2AC$	Vrai : d'un côté on a $\dfrac{BA}{AC}=\dfrac{\lvert b-c\rvert}{\lvert c-a\rvert}=\left\lvert i\sqrt{3}\right\rvert=\sqrt{3}\Rightarrow BA=AC\sqrt{3}$; par ailleurs le triangle ABC est rectangle en A d'où $AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow 4AC^2=BC^2$.
		$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$	Faux : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\arg\dfrac{c-a}{b-a}=\arg\dfrac{1}{i\sqrt{3}}$ $=\arg\dfrac{-i}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\pi}{2}$
		$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA^2$	Vrai : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA^2=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}.\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)=0$ $\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow(CA)\perp(AB)$.

2. Exercice 2 (5 points)

1. Chaque variable X_i est l'indicatrice de l'évènement A : Claude est contrôlé ; on a $P(X_i = 1) = P(A) = p$ et $P(X_i = 0) = P(\overline{A}) = 1 - p$. La somme de toutes ces v.a. donne une loi binomiale de paramètres n = 40 et p.

2. $p = \frac{1}{20}$.

a. Le cours nous donne $E(X) = np = \frac{40}{20} = 2$.

b. $P(X = k) = \binom{n}{k}\frac{1}{20^k}\left(\frac{19}{20}\right)^{n-k}$ d'où $P(X = 0) = \left(\frac{19}{20}\right)^{40}$, $P(X = 1) = 40\frac{1}{20}\left(\frac{19}{20}\right)^{40-1} = 2\left(\frac{19}{20}\right)^{39}$ et $P(X = 2) = \frac{40(40-1)}{2}\frac{1}{20^2}\left(\frac{19}{20}\right)^{40-2} = \frac{39}{20}\left(\frac{19}{20}\right)^{38}$.

c. On cherche $P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \left(\frac{19}{20}\right)^{40} + 2\left(\frac{19}{20}\right)^{39} + \frac{39}{20}\left(\frac{19}{20}\right)^{38} \approx 0{,}6767$.

3. Z_i = gain algébrique réalisé par le fraudeur : Claude fraude 40 fois un ticket à 10 €, il gagne donc 400 € ; s'il est contrôlé X fois, il perd $100X$, d'où son « gain » est $Z = 400 - 100X$.

Z suit évidement la même loi que X ; pour $p = \frac{1}{5}$ et $n = 40$, on a $E(X) = np = 8$ d'où $E(Z) = 400 - 800 = -400$.

4. a. On reprend ce qui a été fait précédemment :

$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = (1-p)^{40} + 40p(1-p)^{39} + \frac{40.39}{2}p^2(1-p)^{38}$ d'où en mettant $(1-p)^{38}$ en facteur :

$$\begin{aligned} P(X \le 2) &= (1-p)^{38}\left[(1-p)^2 + 40p(1-p) + 780p^2\right] = (1-p)^{38}\left(1 - 2p + p^2 + 40p - 40p^2 + 780p^2\right) \\ &= (1-p)^{38}\left(1 + 38p + 741p^2\right). \end{aligned}$$

b. On peut chercher la dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -38(1-x)^{37}\left(741x^2 + 38x + 1\right) + (1-x)^{38}(1482x + 38) \\ &= (1-x)^{37}\left[-28158x^2 - 1444x - 38 + 1482x + 38 - 1482x^2 - 38x\right] = -29640x^2(1-x)^{37}. \end{aligned}$$

f' est bien négative sur [0 ; 1]. Comme $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$, il existe un unique réel x_0 appartenant à l'intervalle [0 ; 1] tel que $f(x_0) = 0{,}01$.

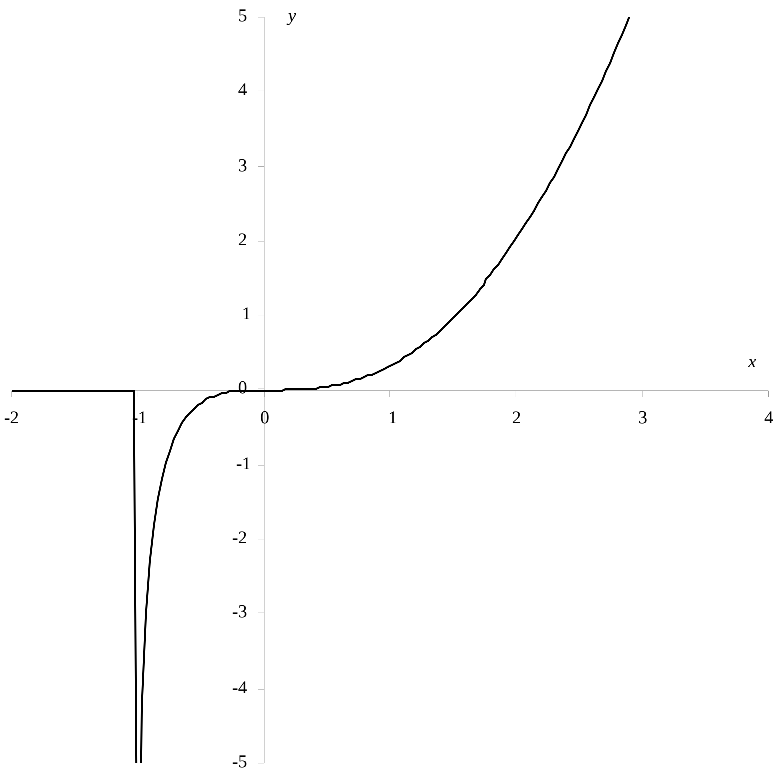
A la calculette on a $f(0{,}19) \approx 0{,}0116$ et $f(0{,}20) \approx 0{,}0079$ d'où $\frac{19}{100} < x_0 < \frac{20}{100}$ et n = 19.

c. En fait on cherche $P(X \ge 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \le 2)$ et on veut que cette probabilité soit supérieure à 0,99, soit que $1 - P(X \le 2) \ge 0{,}99 \Leftrightarrow -P(X \le 2) \ge -0{,}01 \Leftrightarrow P(X \le 2) \le 0{,}01$ d'où avec ce que l'on a fait précédemment : $p \ge 0{,}19$. Pratiquement, cela signifie qu'il faut contrôler un passager sur 5 environ (et dans ce cas le « gain » de Claude est de −400 €).

3. Exercice 3 (6 points)

f sur $]-1 ; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2{,}2x + 2{,}2\ln(x+1)$.

1.



2. a. f semble croissante.

b. Il semble n'y avoir qu'une solution à l'équation $f(x) = 0$, mais c'est douteux.

3. a. $f'(x) = 2x - 2,2 + \dfrac{2,2}{x+1} = \dfrac{2x^2 + 2x - 2,2x - 2,2 + 2,2}{x+1} = \dfrac{2x^2 - 0,2x}{x+1} = \dfrac{x(2x - 0,2)}{x+1}$; on a deux racines, 0 et 0,1 ; le signe du trinôme donne f croissante avant 0, décroissante entre 0 et 0,1 puis de nouveau croissante.

b. En −1, $\ln(x+1)$ tend vers $-\infty$ de même que f ; en $+\infty$ les croissances comparées donnent le terme x^2 gagnant et f tend vers $+\infty$.

c. f s'annule donc deux fois : en 0 évidemment puis une deuxième fois après 0,1 puisque f est croissante entre 0,1 et $+\infty$ et passe d'un nombre négatif à des valeurs positives.

d. Evidemment non…

x	-1		0		$0{,}1$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0		
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-0{,}000$	$\nearrow$	$+\infty$

4. a. Le minimum est aux environs de −0,0003, et on peut prendre $f(0,2) \approx 0,0011$ en positif.

b. On a $\alpha \approx 0,1517$, soit 0,15 à 10^{-2} près.

5. $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 1,1x^2 - 2,2x + 2,2(x+1)\ln(x+1)$.

a. On dérive F :

$$F'(x) = \frac{1}{3}.3x^2 - 1,1.2x - 2,2 + 2,2\left[1.\ln(x+1) + (x+1)\frac{1}{x+1}\right] = x^2 - 2,2x - 2,2 + 2,2\ln(x+1) + 2,2 = f(x).$$

b. $\int_0^\alpha f(x)dx$ représente l'aire algébrique (ici négative) comprise entre la courbe de f, les droites $x = 0$ et $x = \alpha$.

c. $\int_0^{\alpha} f(x)dx = F(\alpha) - F(0) = \frac{1}{3}\alpha^3 - 1,1\alpha^2 - 2,2\alpha + 2,2(\alpha+1)\ln(\alpha+1)$; comme $f(\alpha) = 0$, on a

$$\alpha^2 - 2,2\alpha + 2,2\ln(\alpha+1) = 0 \Leftrightarrow 2,2\ln(\alpha+1) = 2,2\alpha - \alpha^2 ,$$

soit

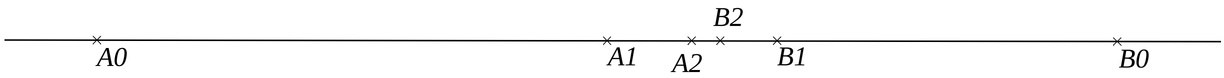
$$\int_0^{\alpha} f(x)dx = \frac{1}{3}\alpha^3 - 1,1\alpha^2 - 2,2\alpha + (\alpha+1)\left(2,2\alpha - \alpha^2\right) = -\frac{2}{3}\alpha^3 + 0,1\alpha^2 .$$

4. Exercice 4 (5 points)

PARTIE A

A_{n+1} milieu du segment $[A_nB_n]$ et B_{n+1} barycentre de $\{(A_n, 1) ; (B_n, 2)\}$.

1.



Même quand n n'est pas très grand, les suites de points convergent vers un point qui semble être à peu près au milieu de $[A_2B_2]$.

2. On a dans ce repère les abscisses suivantes : $u_0 = 0$ et $v_0 = 12$.

Si u_n et v_n sont les abscisses des points A_n et B_n, on a $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ car A_{n+1} est le milieu de $[A_nB_n]$ et $v_{n+1} = \frac{1.u_n + 2.v_n}{1+2} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ car B_{n+1} est le barycentre de $\{(A_n, 1) ; (B_n, 2)\}$.

PARTIE B

1. $w_n = v_n - u_n \Rightarrow w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{2u_n + 4v_n - 3u_n - 3v_n}{6} = \frac{v_n - u_n}{6}$ donc w_n est une suite géométrique de raison 1/6, donc convergente vers 0. Tous ses termes sont positifs car $w_n = w_0 \frac{1}{6^n} = \frac{12}{6^n}$.

2. $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{1}{2} w_n > 0$ donc (u_n) est croissante ;

$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 2v_n - 3v_n}{3} = -\frac{1}{3} w_n < 0$ donc la suite (v_n) est décroissante.

3. Comme $w_n > 0$, on a $u_n < v_n$ donc u_n est croissante majoée, v_n décroissante minorée, les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et sont adjacentes car $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$; elles ont donc la même limite.

4. $t_{n+1} = 2u_{n+1} + 3v_{n+1} = 2\frac{u_n + v_n}{2} + 3\frac{u_n + 2v_n}{3} = u_n + v_n + u_n + 2v_n = 2u_n + 3v_n = t_n = \ldots = t_0 = 2u_0 + 3v_0 = 36$.

PARTIE C

Comme u_n et v_n tendent vers la même limite l, en remplaçant dans t_n on a :

$$t_n = 2u_n + 3v_n = 36 \rightarrow 2l + 3l = 5l = 36 \Rightarrow l = \frac{36}{5} .$$