National remplacement

1. *Exercice 1 (7 points)*

Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty\ [$ par $f(x)=(20x+10)e^{-\frac{1}{2}x}$.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 1 cm).

1. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

3. Établir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty\ [$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.

4. Tracer la courbe C.

5. Calculer l'intégrale $\int_0^3 f(x)dx$.

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t = 0$, est $y(0) = 10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\ ;+\infty\ [$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) : $y'+\frac{1}{2}y=20e^{-\frac{1}{2}t}$.

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie A est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty\ [$.

2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty\ [$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

a. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0\ ;+\infty\ [$ vérifiant $g(0) = 10$. Démontrer que la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $[0\ ;+\infty\ [$, de l'équation différentielle (E') : $y'+\frac{1}{2}y=0$.

b. Résoudre l'équation différentielIe (E').

c. Conclure.

3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.

4. La valeur θ en degrés Celsius de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 3]$.

Calculer la valeur exacte de θ, puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.

2. *Exercice 2 (5 points, non spécialistes)*

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point, chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.Aucune justification n'est demandée.

1. Soit z le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{3}$. On a alors :

A : $z^{14} = -128\sqrt{3} - 128i$.   C : $z^{14} = -64 + 64i\sqrt{3}$.

B : $z^{14} = 64 - 64i$.   D : $z^{14} = -128 + 128i\sqrt{3}$.

2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, le point S d'affixe 3 et le point T d'affixe $4i$. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-3| = |3-4i|$.

A : (E) est la médiatrice du segment [ST].

B : (E) est la droite (ST) ;

C : (E) est le cercle de centre Ω d'affixe $3 - 4i$, et de rayon 3 ;

D : (E) est le cercle de centre S et de rayon 5.

3. On considère un hexagone régulier $ABCDEF$, dont les côtés sont de longueur 1. Le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CE}$ est égal à :

A : $\sqrt{3}$.   B : -3.   C : $-\sqrt{3}$.   D : $-\frac{3}{2}$.

4. Une fonction g est définie sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$ par $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x-3}$; soit Γ sa courbe représentative dans un repère du plan.

A : Γ admet une asymptote d'équation $y = -1$.

B : Γ n'admet pas d'asymptote.

C : Γ admet une asymptote d'équation $y = x$.

D : Γ admet une asymptote d'équation $y = 1$.

5. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$. La fonction f'', dérivée seconde de la fonction f sur $\mathbb{R}$, est définie par :

A : $f''(x) = \int_0^x -2te^{-t^2}\,dt$.   C : $f''(x) = -2xe^{-x^2}$.

B : $f(x) = \int_0^x e^{-x^2}\,dx$.   D : $f''(x) = e^{-x^2}$.

3. *Exercice 2 (5 points, spécialistes)*

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidatindiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation : $x^2 - x + 4 \equiv 0\ (\text{modulo } 6)$.

A : toutes les solutions sont des entiers pairs.

B : il n'y a aucune solution.

C : les solutions vérifient $x \equiv 2(6)$.

D : les solutions vérifient $x \equiv 2(6)$ ou $x \equiv 5(6)$.

Correction

Testons la réponse D : si $x \equiv 2(6)$ alors $x^2 - x + 4 \equiv 4 - 2 + 4(6) \equiv 6(6) \equiv 0(6)$; si $x \equiv 5(6)$ alors $x^2 - x + 4 \equiv 25 - 5 + 4(6) \equiv 24(6) \equiv 0(6)$. Ok.

2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x + 34y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

A : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (34k-7 ; 5-24k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

B : L'équation (E) n'a aucune solution.

C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (17k-7 ; 5-12k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (-7k ; 5k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Correction

Simplifions par 2 : $12x + 17y = 1$ a toujours des solutions car 12 et 17 sont premiers entre eux ; la B est fausse. Si on cherche une solution particulière la C donne l'idée que -7 et 5 est pas mal : $12 \times -7 + 17 \times 5 = 1$. Après on termine de manière classique pour obtenir la solution C.

3. On considère les deux nombres $n = 1\,789$ et $p = 17\,89^{2005}$. On a alors :

A : $n \equiv 4(17)$ et $p \equiv 0(17)$.

C : $p \equiv 4(17)$.

B : p est un nombre premier.

D : $p \equiv 1(17)$.

Correction

On a $n = 1\,789 = 4$ modulo 17 ; par ailleurs $4^2 = 16 \equiv -1(17)$ donc $4^{2\times 1002+1} \equiv (-1)^{1002} \times 4(17) \equiv 4(17)$. Réponse C.

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points A et B d'affixes respectives a et b. Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse $[AB]$ si et seulement si le point M d'affixe z est tel que :

A : $z = \dfrac{b - ia}{1 - i}$.

C : $a - z = i(b - z)$.

B : $z - a = e^{i\frac{\pi}{4}}(b - a)$.

D : $b - z = \dfrac{\pi}{2}(a - z)$.

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts A et B ; on note I le milieu du segment $[AB]$. Soit f la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; soit h la symétrie centrale de centre I.

A : $h \circ g \circ f$ transforme A en B et c'est une rotation.

B : $h \circ g \circ f$ est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment $[AB]$.

C : $h \circ g \circ f$ n'est pas une similitude.

D : $h \circ g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

4. Exercice 3 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère le plan P passant par le point $B(1 ; -2 ; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-2 ; 1 ; 5)$ et le plan R d'équation cartésienne $x + 2y - 7 = 0$.

a. Démontrer que les plans P et R sont perpendiculaires.

b. Démontrer que l'intersection des plans P et R est la droite Δ passant par le point C(−1 ; 4 ; −1) et de vecteur directeur $\vec{u}\,(2\,;-1\,;1)$.

c. Soit le point $A(5\,;-2\,;-1)$. Calculer la distance du point A au plan P, puis la distance du point A au plan R.

d. Déterminer la distance du point A à la droite Δ.

2. a. Soit, pour tout nombre réel t, le point M_t de coordonnées $(1 + 2t\,;3 - t\,;t)$. Déterminer en fonction de t la longueur AM. On note $\varphi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b. Étudier le sens de variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$; préciser son minimum.

c. Interpréter géométriquement la valeur de ce minimum.

5. *Exercice 4 (3 points)*

Partie A

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier, possédant une face bleue, deux faces rouges et une face verte ; on suppose le dé parfaitement équilibré.

Une partie consiste à effectuer deux lancers sucessifs et indépendants de ce dé. À chaque lancer on note la couleur de la face cachée.

On considère les évènements suivants :

E est l'évènement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont vertes »,

F est l'évènement « à l'issue d une partie, les deux faces notées sont de la même couleur ».

1. Calculer les probabilités des évènements E et F ainsi que la probabilité de E sachant F.

2. On effectue dix parties identiques et indépendantes. Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux fois l'évènement F au cours de ces dix parties (on en donnera une valeur approchée décimale à 10^{-3} près).

Partie B

On souhaite savoir si le dé utilisé peut être considéré comme parfaitement équilibré. Pour cela on numérote de 1 à 4 les quatre faces de ce dé, puis on lance ce dé 160 fois en notant le nombre n_i de fois où chaque face est cachée ; on obtient les résultats suivants :

face i	1	2	3	4
effectif n_i	30	48	46	32

On note f_i la fréquence relative à la face n_i et d^2_{obs} le réel $\sum_{i=1}^{4}\left(f_i - \frac{1}{4}\right)^2$. On simule ensuite 1 000 fois l'expérience consistant à tirer un chiffre au hasard 160 fois parmi l'ensemble (1 ; 2 ; 3 ; 4) puis, pour chaque simulation, on calcule $d^2 = \sum_{i=1}^{4}\left(F_i - \frac{1}{4}\right)^2$, où F_i est la fréquence d'apparition du nombre i. Le $9^{\text{ème}}$ décile de

la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 est égal à 0,0098. Au vu de l'expérience réalisée et au risque de 10 %, peut-on considérer le dé comme parfaitement équilibré ?