Amérique du Nord Correction

1. Exercice 1

2. Exercice 2 (non spécialistes)

5 points

3. Exercice 2 (spécialistes)

5 points

1. a. σ est évidemment une similitude directe de centre Ω, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

b. $\sigma : z \mapsto z'$ avec $z' - \omega = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}(z-\omega) \Leftrightarrow z'-2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z-2) \Leftrightarrow z' = \left(\frac{1+i}{2}\right)(z-2)+2$ d'où en développant : $z' = \left(\frac{1+i}{2}\right)z+1-i$.

c. $z-z' = z-\frac{1+i}{2}z-1+i = \frac{1-i}{2}z-1+i$ et $i(2-z') = i\left(2-\frac{1+i}{2}z-1+i\right) = -\frac{i-1}{2}z+i-1$, c'est pareil.

2. a. **Question de cours** :
Si A est un point donné d'affixe a, alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que

$$\begin{cases} AQ = AP \\ \left(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AQ}{AP} = \frac{|q-a|}{|p-a|} = \left|\frac{q-a}{p-a}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{q-a}{p-a}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \frac{q-a}{p-a} = 1 \times e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$, et donc $q-a = i(p-a)$.

b. Comme on a $z-z' = i(2-z')$, ceci se traduit par : M est l'image de Ω par la rotation de centre M', d'angle $\frac{\pi}{2}$, soit $\Omega M M'$ est rectangle isocèle en M'.

3. a. Par récurrence : $a_0 = 2+i$; avec la relation donnée : $a_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^0 e^{i\frac{(0+2)\pi}{4}} + 2 = e^{i\frac{\pi}{2}} + 2 = 2+i$; ça marche au rang 0. On suppose que ça roule au rang n ; au rang n+1 on a alors avec la formule :

$$a_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} e^{i\frac{(n+3)\pi}{4}} + 2$$

et d'un autre côté par le calcul :

$$a_{n+1} = \left(\frac{1+i}{2}\right)a_n + 1 - i = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} a_n + 1 - i = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2\right] + 1 - i$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} e^{i\frac{(n+3)\pi}{4}} + \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} + 1 - i = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} e^{i\frac{(n+3)\pi}{4}} + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) + 1 - i = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} e^{i\frac{(n+3)\pi}{4}} + 2.$$

Ok !

b. $a_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 e^{i\frac{5\pi}{4}} + 2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2 = \frac{7}{4} - i\frac{1}{4}$.

4. Il faut trouver n_0 tel que

$$\Omega A_{n_0} \le 0,01 \Leftrightarrow \left| a_{n_0} - 2 \right| \le 0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n_0} \le 0,01 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} n_0 \ln(2) \le \ln(0,01) \Leftrightarrow n_0 \ge \frac{-2\ln(0,01)}{\ln 2} \approx 13,3$$

donc $n_0 = 14$.

4. Exercice 3

5 points

5. Exercice 4

7 points