France Correction

1. Exercice 1

2. Exercice 2

5 points

1. a. $f(x)=x^2e^{1-x}$ tend vers $+\infty$ en $-\infty$ car les deux termes tendent vers $+\infty$.

En $+\infty$, les croissances comparées permettent de dire que l'exponentielle fait tendre *f* vers 0. On a alors une asymptote horizontale $y=0$.

b. *f* est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x)=2xe^{1-x}-x^2e^{1-x}=x(2-x)e^{1-x}$.

c. Comme l'exponentielle est positive, *f'* est du signe de $x(2-x)$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	0

La représentation graphique est laissée au lecteur.

2. a. Faisons une intégration par parties : $\begin{cases} u=x^{n+1} \\ v'=e^{1-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'=(n+1)x^n \\ v'=-e^{1-x} \end{cases}$ d'où

$$I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{1-x}dx=\left[-x^{n+1}e^{1-x}\right]_0^1-\int_0^1-(n+1)x^ne^{1-x}dx=-1e^0+0+(n+1)\int_0^1 x^ne^{1-x}dx=-1+(n+1)I_n.$$

b. $I_1=\int_0^1 x^1e^{1-x}dx=\left[-e^{1-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{1-x}dx=-1+e+\left[-xe^{1-x}\right]_0^1=e-2$; par application de la formule de récurrence, on trouve : $I_2=-1+2I_1=-1+2(e-2)=2e-5$.

Remarque : on aurait pu faire calculer $I_0=\int_0^1 e^{1-x}dx=\left[-e^{1-x}\right]_0^1=-1+e$ *puis appliquer la formule de récurrence :* $I_1=-1+I_0=-1+(e-1)=e-2$ *... on aurait évité une deuxième intégration par parties...*

c. Aire entre la courbe de *f*, l'axe horizontal, $x = 0$ et $x = 1$.

3. a. $0\le x\le 1 \Leftrightarrow -1\le -x\le 0 \Leftrightarrow 0\le 1-x\le 1 \Leftrightarrow e^0\le e^{1-x}\le e^1 \Leftrightarrow x^n\le x^ne^{1-x}\le x^ne$ car $x^n>0$.

b. On intègre l'inégalité entre 0 et 1 :

$$\int_0^1 x^n dx\le\int_0^1 x^ne^{1-x}dx\le\int_0^1 x^n e dx \Leftrightarrow \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1\le I_n\le e\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1}\le I_n\le\frac{e}{n+1} ;$$

donc I_n tend vers 0 grâce à nos amis les gendarmes...

3. Exercice 3 (non spécialistes)

1. Question de cours

– Si *z* et *z'* sont deux nombres complexes non nuls, alors : arg(*zz'*) = arg(*z*)+ arg(*z'*) à $2k\pi$ près, avec *k* entier relatif.

– Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul d'affixe z on a : $\arg(z) = (\vec{u}, \vec{w})$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

a. On utilise arg(zz') = arg(z)+ arg(z') avec $z' = \frac{1}{z}$, ce qui donne $\arg z + \arg\frac{1}{z} = \arg 1 = 0 \Rightarrow \arg\frac{1}{z} = -\arg z$; on réutilise la propriété 1 du produit avec $z' = \frac{1}{z'}$ et on a le résultat.

b. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\vec{u}, \overrightarrow{AC}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(c-a) - \arg(b-a) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)$ en utilisant la propriété 2.

2. a. $z' = \frac{1}{\bar{z}}$ donc $\arg(z') = -\arg(\bar{z}) = -(-\arg z) = \arg z$. Si M est sur une demi-droite d'origine O, on a $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg z = \arg z' = (\vec{u}, \overrightarrow{OM'})$ donc M' est sur la même demi-droite.

b. $z = \frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$ donc les points M invariants est le cercle trigonométrique.

c. Le calcule est un peu pénible... $\frac{z'-1}{z'-i} = \frac{\frac{1}{\bar{z}}-1}{\frac{1}{\bar{z}}-i} = \frac{1-\bar{z}}{1-i\bar{z}} = \frac{\bar{z}-1}{i\bar{z}-1} = \frac{1}{i}\left(\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+i}\right) = -i\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}$. La dernière égalité est due à $\frac{1}{i} = -i$ et aux propriétés du conjugué.

On a donc $\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right) = \arg(-i) - \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)$.

3. a. $\arg\frac{z-1}{z-i} = (\overrightarrow{VM}, \overrightarrow{UM}) \Leftrightarrow \frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\overrightarrow{VM}, \overrightarrow{UM}) = 0 + k\pi$, soit U, V et M alignés.

b. En utilisant la relation précédente on a $(\overrightarrow{VM'}, \overrightarrow{UM'}) = -\frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{VM}, \overrightarrow{UM})$; donc si M est sur UV, $(\overrightarrow{VM'}, \overrightarrow{UM'}) = -\frac{\pi}{2} - k\pi$ et M' est sur le cercle de diamètre [UV] privé des points U et V.

4. Exercice 3 (spécialistes)

Partie A : Question de cours

Théorème de Bézout

Soit a et b deux entiers non nuls, d leur PGCD. Alors il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = d$.

Théorème de Gauss : a, b, c trois entiers non nuls ; si a et b sont premiers entre eux et que a divise bc, alors a divise c.

La démonstration est immédiate : a divise bc donc $bc = ka$, a et b sont premiers entre eux donc il existe u et v tels que $au + bv = 1$, soit en multipliant par c : $cau + cbv = c \Rightarrow cau + kav = c \Leftrightarrow a(cu + kv) = c$; il est donc clair que a divise c (ainsi que $cu + kv$ ...).

Partie B

$$(S)\begin{cases} n \equiv 13(19) \\ n \equiv 6(12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 13 + 19k \\ n \equiv 6 + 12k' \end{cases}.$$

1. Théorème de Bézout : 19 et 12 sont premiers entre eux donc il existe un couple (u ; v) d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$.

$N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S) : il faut mettre N sous la forme $N \equiv 13 + 19k$. Or $12v = 1 - 19u$ donc $N = 13(1-19u) + 6 \times 19u = 13 + 19 \times (-7u)$; ok.

De même $N = 13\times 12v + 6\times 19u = 13\times 12v + 6(1-12v) = 6 + 12\times 7v$; ok.

2. a. Si n_0 est une solution de (S), on a $\begin{cases} n_0 = 13 + 19k_0 \\ n_0 = 6 + 12k'_0 \end{cases}$ d'où en soustrayant ligne à ligne :

$$\begin{cases} n - n_0 = 19(k - k_0) \\ n - n_0 = 12(k' - k'_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv n_0\,(19) \\ n \equiv n_0\,(12) \end{cases}.$$

b. En fait 19 divise $n - n_0$ de même que 12 ; comme ils sont premiers entre eux, 19×12 divise $n - n_0$, ce qui équivaut à $n \equiv n_0\,(12\times 19)$.

3. a. Avec l'algorithme d'Euclide on a $19(-5) + 12(8) = 1$; on peut donc prendre $u = -5$ dans $N = 13 + 19\times(-7u)$, ce qui donne $N = 678$; de même on prend $v = 8$ et $N = 6 + 12\times(7v)$, ce qui redonne bien $N = 678$.

b. $n \equiv n_0\,(12\times 19) \equiv 678(12\times 19) \equiv 678(228) \equiv 222(228)$.

4. 222.

5. Exercice 4

1. a. On note C quand le ballon est crevé, $\overline{C}$ quand il ne l'est pas lors d'un tir.

La probabilité qu'au bout de deux tirs le ballon soit intact est $p(\overline{C}, \overline{C}) = p(\overline{C})p(\overline{C}) = 0{,}8^2 = 0{,}64$.

b. La probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon : $1 - p(\overline{C}, \overline{C}) = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$.

c. $p_n = 1 - p(\overline{C}, \overline{C}, \ldots, \overline{C}) = 1 - 0{,}8^n$.

d. $p_n = 1 - 0{,}8^n > 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}01 > 0{,}8^n \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8} = 20{,}63$, donc $n \geq 21$.

2. En fait il vaut mieux éviter de faire un arbre :

avec $k = 1$, on a $p_1 = p(C) = 0{,}2$;

avec $k = 2$, on a $p_2 = p(C) + p(\overline{C}, C) = 0{,}2 + 0{,}2\times 0{,}8$;

avec $k = 3$, on a $p_3 = p(C) + p(\overline{C}, C) + p(\overline{C}, \overline{C}, C) = 0{,}2 + 0{,}2\times 0{,}8 + 0{,}2\times 0{,}8^2$;

avec $k = 4$, $p_4 = p(C) + p(\overline{C}, C) + p(\overline{C}, \overline{C}, C) + p(\overline{C}, \overline{C}, \overline{C}, C) = 0{,}2 + 0{,}2\times 0{,}8 + 0{,}2\times 0{,}8^2 + 0{,}2\times 0{,}8^3$;

la probabilité totale est $p = \frac{1}{4}p_1 + \frac{1}{4}p_2 + \frac{1}{4}p_3 + \frac{1}{4}p_4 = 0{,}4096$.

3. a.

Face k	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face k	58	49	52	41
Fréquences	0,29	0,245	0,26	0,205

b. $d^2 = \sum_{k=1}^{4}\left(f_k - \frac{1}{4}\right)^2 = 0{,}00375$.

c. d^2 est compris entre Q_3 et D_9, à 10 % près le dé n'est pas pipé.