Homographie, Polynésie 2006

Le plan complexe estmuni du repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$; unité graphique 2 cm. On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives a = 1 et b = −1. On considère l'application f qui, à tout point M différent du point B, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par

$$z'=\frac{z-1}{z+1}.$$

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

1. Déterminer les points invariants de f c'est-à-dire les points M tels que $M = f(M)$.

2. a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de −1, $(z'-1)(z+1)=-2$.

b. En déduire une relation entre $|z'-1|$ et $|z+1|$, puis entre arg (z' − 1) et arg (z + 1), pour tout nombre complexe z différent de −1. Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.

3. Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle (C') de centre A et de rayon 1.

4. Soit le point P d'affixe $p=-2+i\sqrt{3}$.

a. Déterminer la forme exponentielle de (p +1).

b. Montrer que le point P appartient au cercle (C).

c. Soit Q le point d'affixe $q=-\overline{p}$ où $\overline{p}$ est le conjugué de p. Montrer que les points A, P' et Q sont alignés.

d. En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P' du point P par l'application f.

Correction

1. $M = f(M)$, soit $z=\frac{z-1}{z+1}\Leftrightarrow z^2+z=z-1\Leftrightarrow z^2=-1\Leftrightarrow z=\pm i$.

2. a. $(z'-1)(z+1)=\left(\frac{z-1}{z+1}-1\right)(z+1)=\frac{\cancel{z}-1-\cancel{z}-1}{z+1}(z+1)=-2$.

b. En passant la relation précédente au module, on a : $|z'-1||z+1|=|-2|\Leftrightarrow|z'-1|=\frac{2}{|z+1|}$; de même en passant à l'argument : $\arg(z'-1)+\arg(z+1)=\arg(-2)=\pi\Leftrightarrow\arg(z'-1)=\pi-\arg(z+1)$.

Ceci se traduit par : $AM'=\frac{2}{BM}$ et $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM'}\right)=\pi-\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{BM}\right)$.

3. Si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors $BM=2$ d'où $AM'=\frac{2}{2}=1$ donc M' appartient au cercle (C') de centre A et de rayon 1.

4. a. $p+1=-1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

b. On a évidemment $|p+1|=2$ donc P appartient au cercle (C).

c. $q=-\overline{p}=-\left(-2-i\sqrt{3}\right)=2+i\sqrt{3}\Rightarrow q+1=3+i\sqrt{3}$; par ailleurs $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AP'}\right)=\pi-\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{BP}\right)=\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$ et $AP'=\frac{2}{2}=1$; donc $p'=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow p'+1=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}(q+1)\Leftrightarrow\overrightarrow{AP'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$.

d. La question est un peu débile puisqu'on a l'affixe de p' (peut-être une autre méthode était-elle attendue au 4. c. ?).

Vrai-Faux justifié, Polynésie 2006

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les points $A(0\,;0\,;2)$ $B(0\,;4\,;0)$ et $C(2\,;0\,;0)$.

On désigne par I le milieu du segment $[BC]$, par G l'isobarycentre des points A, B et C, et par H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

Proposition 1 : « l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0$ est le plan (AIO) ».

Proposition 2 : « l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$ est la sphère de diamètre $[BC]$ ».

Proposition 3 : « le volume du tétraèdre $OABC$ est égal à 4 ».

Proposition 4 : « le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + y + 2z = 4$ et le point H a pour coordonnées $\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right)$. »

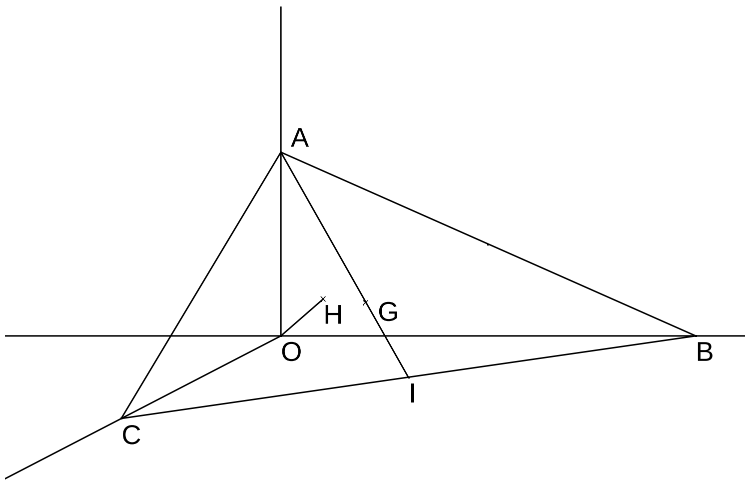
Proposition 5 : « la droite (AG) admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=2-2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. »

<u>Correction</u>

Proposition 1 : Faux. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0$: avec les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow 2x-4y=0$; on vérifie aisément que A et $O(0\,;0\,;0)$ sont dans ce plan mais pas $I(1\,;2\,;0)$.

Proposition 2 : Vrai.

On réduit facilement $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| \Leftrightarrow \left\|2\overrightarrow{MI}\right\|=\left\|\overrightarrow{CB}\right\| \Leftrightarrow IM=\frac{1}{2}BC=\sqrt{5}$. Sphère de centre I, de rayon $\frac{1}{2}BC$ = sphère de diamètre $[BC]$.



Proposition 3 : Faux. Une base est BOC, d'aire $\frac{1}{2}\times 4\times 2=4$; une hauteur est $OA = 2$; le volume est $\frac{1}{3}\times 2\times 4=\frac{8}{3}$.

Proposition 4 : Vrai. On vérifie que les coordonnées des trois points sont ok. $2\times 0+0+2\times 2=4$, etc.

Si le point H a pour coordonnées $\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right)$, le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est colinéaire au vecteur normal à (ABC), soit $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$. C'est le cas… On vérifie enfin que H est dans (ABC) : $2\frac{8}{9}+\frac{4}{9}+2\frac{8}{9}=\frac{36}{9}=4$, ok.

Proposition 5 : **Vrai**. Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AI}=\begin{pmatrix}1-0\\2-0\\0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ qui est bien un vecteur directeur de $\begin{cases}x=t\\y=2t \quad (t\in\mathbb{R})\\z=2-2t\end{cases}$; par ailleurs A est sur cette droite.

<u>Retard au travail, Polynésie 2006</u>

On a posé à 1 000 personnes la question suivante : « Combien de fois êtes-vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois ? ». Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant :

Retards le 1er mois / Retards le 2ème mois	0	1	***2 ou plus***	Total
0	262	212	73	547
1	250	73	23	346
2 ou plus	60	33	14	107
Total	572	318	110	1000

1. On choisit au hasard un individu de cette population.

a. Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le premier mois,

b. Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le deuxième mois sachant qu'il n'en a pas eu le premier mois.

2. On souhaite faire une étude de l'évolution du nombre de retards sur un grand nombre n de mois (n entier naturel non nul). On fait les hypothèses suivantes :

– si l'individu n'a pas eu de retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois n+1 est 0,46.

– si l'individu a eu exactement un retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois n+1 est 0,66.

– si l'individu a eu deux retards ou plus le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois n+1 est encore 0,66.

On note A_n, l'évènement « l'individu n'a eu aucun retard le mois n, B_n, l'évènement « l'individu a eu exactement un retard le mois n », C_n, l'évènement « l'individu a eu deux retards ou plus le mois n ».

Les probabilités des évènements A_n, B_n, C_n sont notées respectivement p_n, q_n et r_n.

a. Pour le premier mois (n = 1), les probabilités p_1, q_1 et r_1 sont obtenues à l'aide du tableau précédent. Déterminer les probabilités p_1, q_1 et r_1.

b. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n, q_n, et r_n. Onpourra s'aider d'un arbre.

c. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -0,2p_n + 0,66$.

d. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - 0,55$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

e. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

<u>Correction</u>

1. a. Il y a 318 + 110 = 428 individus sur 1000, la probabilité est de 0,428.

b. Il y en a 572 qui n'ont pas eu de retard le premier mois, parmi eux 250 + 60 = 310 ont eu un retard le deuxième mois, soit une probabilité de $\frac{310}{572}\approx 0,542$.

2. a. A_1, = « aucun retard le mois 1 », soit une probabilité de $p_1 = 0,572$; B_1 = « exactement 1 retard le mois 1 » : $q_1 = 0,318$ et C_1 = « deux retards ou plus le mois 1 » : $r_1 = 0,110$.

b. On utilise les probabilités totales :

$$p_{n+1} = p(A_{n+1}) = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap B_n) + p(A_{n+1} \cap C_n)$$
$$= p_{A_n}(A_{n+1})\,p(A_n) + p_{B_n}(A_{n+1})\,p(B_n) + p_{C_n}(A_{n+1})\,p(C_n) = 0,46p_n + 0,66q_n + 0,66r_n.$$

c. Mais on a $p_n + q_n + r_n = 1 \Rightarrow q_n + r_n = 1 - p_n$ donc $p_{n+1} = 0,46p_n + 0,66(1 - p_n) = -0,2p_n + 0,66$.

d. $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,55 = -0,2p_n + 0,66 - 0,55 = -0,2(u_n + 0,55) + 0,11 = -0,2u_n - 0,11 + 0,11 = -0,2u_n$.

(u_n) est une suite géométrique de raison −0,2.

e. Comme $|-0,2| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,55$.

<u>Fonction, aire, équation, Polynésie 2006</u>

<u>Partie A</u>

On donne le tableau de variations d'une fonction *f* dérivable sur ℝ :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	0	↗	$4e^{-2}$	↘	0

On définit la fonction *F* sur ℝ par $F(x) = \int_2^x f(t)\,dt$.

1. Déterminer les variations de la fonction *F* sur ℝ .

2. Montrer que $0 \le F(3) \le 4e^{-2}$.

<u>Partie B</u>

La fonction *f* considérée dans la partie A est la fonction définie sur ℝ par $f(x) = x^2e^{-x}$. On appelle *g* la fonction définie sur ℝ par $g(x) = e^{-x}$.

On désigne par (C) et (Γ) les courbes représentant respectivement les fonctions *f* et *g* dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Les courbes sont tracées en annexe.

1. a. Montrer que les variations de la fonction *f* sont bien celles données dans la partie A. On ne demande pas de justifier les limites.

b. Étudier les positions relatives des courbes (C) et (Γ).

2. Soit *h* la fonction définie sur ℝ par $h(x) = \left(x^2 - 1\right)e^{-x}$.

a. Montrer que la fonction *H* définie sur ℝ par $H(x) = \left(-x^2 - 2x - 1\right)e^{-x}$ est une primitive de la fonction *h* sur ℝ .

b. Soit un réel α supérieur ou égal à 1. On considère la partie du plan limitée par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$. Déterminer l'aire $A(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, de cette partie du plan.

c. Déterminer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

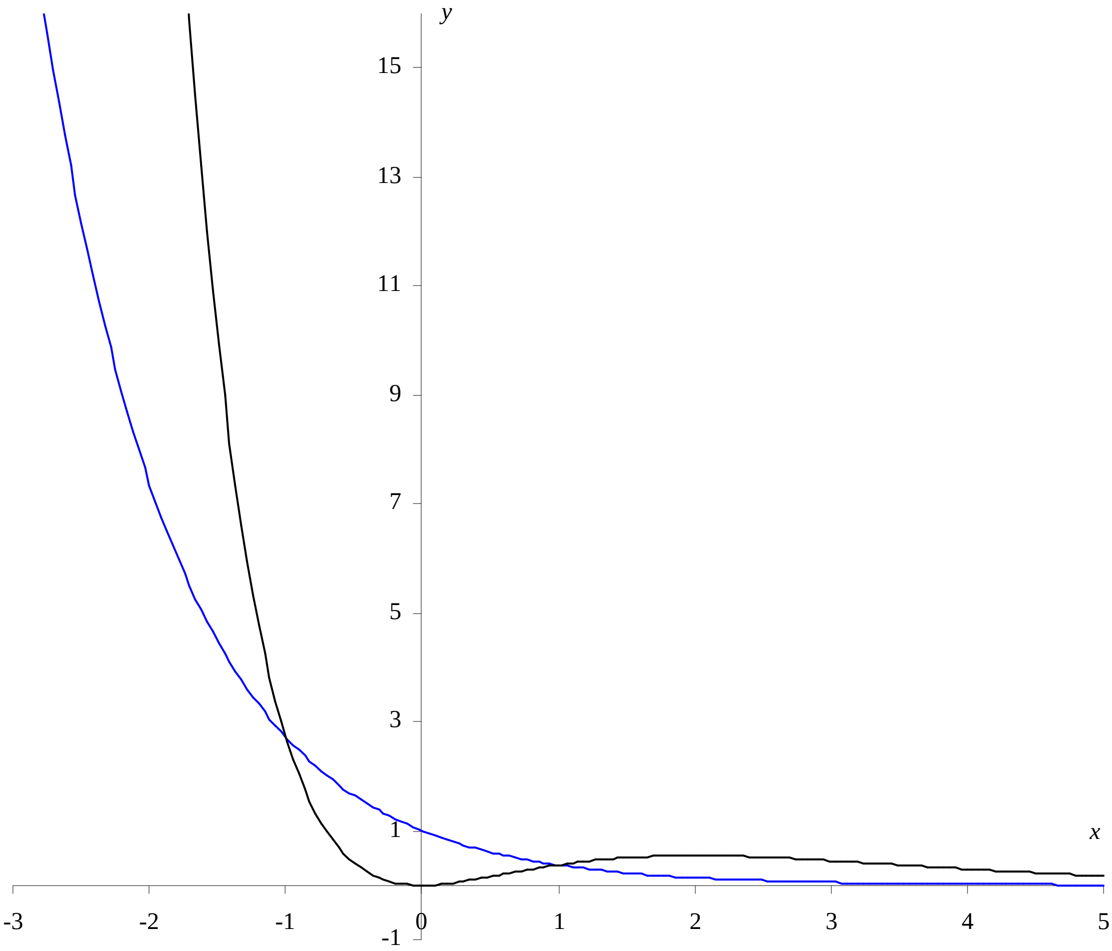
3. On admet que, pour tout réel *m* strictement supérieur à $4e^{-2}$, la droite d'équation $y = m$ coupe la courbe (C) au point $P(x_P\,;m)$ et la courbe (Γ) au point $Q(x_Q\,;m)$.

L'objectif de cette question est de montrer qu'il existe une seule valeur de x_P, appartenant à l'intervalle $]-\infty\,;-1]$ telle que la distance *PQ* soit égale à 1.

a. Faire apparaître approximativement sur le graphique (proposé en annexe) les points P et Q tels que x_P appartienne à $\left]-\infty\,;-1\right]$ et PQ = 1.

b. Exprimer la distance PQ en fonction de x_P et de x_Q. Justifier l'égalité $f(x_P)=g(x_Q)$.

c. Déterminer la valeur de x_P telle que PQ = 1.



<u>Correction</u>

<u>Partie A</u>

1. $F(x)=\int_2^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x)=f(x)$: f est toujours positive donc F est croissante

2. 3 appartient à l'intervalle $[2\,;+\infty[$, sur cet intervalle f est positive donc $F(3)=\int_2^3 f(t)\,dt\geq 0$; comme $f(t)\leq 4e^{-2}$ sur cet intervalle, en intégrant on a de même : $\int_2^3 f(t)\,dt\leq\int_2^3 4e^{-2}\,dt=(3-2)4e^{-2}=4e^{-2}$

<u>Partie B</u>

$f(x)=x^2e^{-x}$, $g(x)=e^{-x}$.

1. a. On dérive f : $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$; e^{-x} est toujours strictement positive, f' est du signe de $x(2-x)$, négatif entre les racines 0 et 2, positif à l'extérieur.

b. Signe de $f(x)-g(x)=x^2e^{-x}-e^{-x}=\left(x^2-1\right)e^{-x}=(x-1)(x+1)e^{-x}$.

Donc négatif (C est en dessous de Γ) lorsque $x\in[-1;1]$ et positif (C est au-dessus de Γ) lorsque $x\in\,]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$.

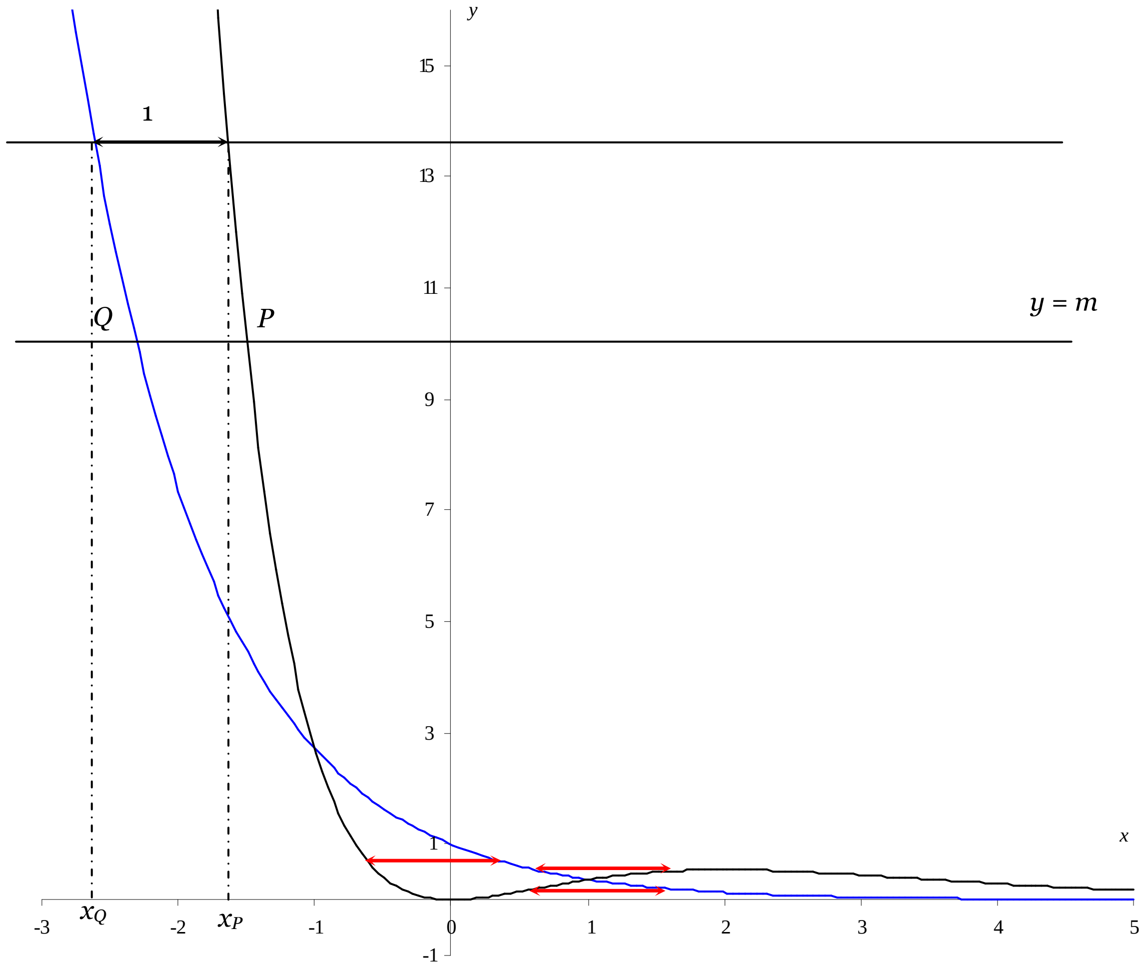
2. $h(x)=\left(x^2-1\right)e^{-x}$.

a. On dérive H : $H'(x)=(-2x-2)e^{-x}-\left(-x^2-2x-1\right)e^{-x}=\left(-2x-2+x^2+2x+1\right)e^{-x}=\left(x^2-1\right)e^{-x}$. Ok.

b. $A(\alpha)=\int_1^{\alpha} f(x)-g(x)\,dx=\int_1^{\alpha} h(x)\,dx=H(\alpha)-H(1)=\left(-\alpha^2-2\alpha-1\right)e^{-\alpha}+4e^{-1}$.

c. Les croissances comparées donnent $H(\alpha)$ tend vers 0 en $+\infty$ donc $A(\alpha)$ tend vers $4e^{-1}$.

3. a. Voir la figure (on voit quatre solutions, représentées par 1 flèche noire et 3 flèches rouges qui ne



conviennent pas car x_P n'est alors pas dans $]-\infty;-1]$).

b. $PQ=\left|x_P-x_Q\right|$; par ailleurs on a $f(x_P)=m=g(x_Q)$ par définition.

c. $PQ=1\Leftrightarrow\left|x_P-x_Q\right|=1\Leftrightarrow x_P-x_Q=\pm1\Leftrightarrow x_P=x_Q\pm1$ donc

$$f\left(x_Q \pm 1\right)=g\left(x_Q\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x_Q+1\right)^2 e^{-x_Q} e^{-1}=e^{-x_Q} \Leftrightarrow \left(x_Q+1\right)^2=e \Leftrightarrow x_Q+1=\pm\sqrt{e} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q=\sqrt{e}-1 \ (>-1) \\ x_Q=-\sqrt{e}-1 \end{cases} \\ \left(x_Q-1\right)^2 e^{-x_Q} e^{1}=e^{-x_Q} \Leftrightarrow \left(x_Q-1\right)^2=e^{-1} \Leftrightarrow x_Q-1=\pm\sqrt{e^{-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q=\sqrt{e^{-1}}+1 \ (>-1) \\ x_Q=-\sqrt{e^{-1}}+1 \ (>-1) \end{cases} \end{cases}$$

La seule solution est donc $x_Q=-\sqrt{e}-1$, $x_P=x_Q+1=-\sqrt{e}-1+1=-\sqrt{e}$.

On vérifie pour *f* et g : $f\left(-\sqrt{e}\right)=ee^{\sqrt{e}}=e^{1+\sqrt{e}}$, $g\left(-\sqrt{e}-1\right)=e^{1+\sqrt{e}}$, ok.