Am. du Sud 2006

3 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points : A de coordonnées (3 ; 1 ; −5), B de coordonnées (0 ; 4 ; −5), C de coordonnées (−1 ; 2 ; −5) et D de coordonnées (2 ; 3 ; 4).

Pour chacune des six affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée. Le candidat doit indiquer sur sa copie le numéro de la question et la mention « VRAI » *ou* « FAUX ». *On attribue* 0,5 *point par réponse correcte et on retranche* 0,25 *point par réponse incorrect. L'absence de réponse n'est pas pénalisée. Un éventuel total négatif est ramené à* 0.

1. Les points A, B et D sont alignés.
2. La droite (AB) est contenue dans le plan d'équation cartésienne : $x + y = 4$.
3. Une équation cartésienne du plan (BCD) est : $18x - 9y - 5z + 11 = 0$.
4. Les points A, B, C et D sont coplanaires.
5. La sphère de centre A et de rayon 9 est tangente au plan (BCD).
6. Une représentation paramétrique de la droite (BD) est : $\begin{cases} x = 1-2k \\ y = \dfrac{7}{2}+k \\ z = -\dfrac{1}{2}-9k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$.

Am. du Sud 2006

5 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

1. *Question de cours*

On rappelle que : « Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = (\vec{u},\vec{w})$ ».

Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.

a. Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right)$.

b. Interpreter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$.

2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 4 + i$, $z_B = 1 + i$, $z_C = 5i$ et $z_D = -3 - i$. Placer ces points sur une figure.

3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = (1+2i)z - 2 - 4i$.

a. Préciser les images des points A et B par f.

b. Montrer que f admet un unique point invariant Ω, dont on précisera l'affixe ω.

4. a. Montrer que pour tout nombre complexe z, on a : $z' - z = -2i(2 - i - z)$.

b. En déduire, pour tout point M différent du point ω, la valeur de $\dfrac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{\Omega M}\right)$.

c. Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$?

d. Soit E le point d'affixe $z_E = -1 - i\sqrt{3}$. écrire z_E sous forme exponentielle puis placer le point E sur la figure. Réaliser ensuite la construction du point E' associé au point E.

Am. du Sud 2006

4 points

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées. La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{4}$. La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$.

Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.

Soit n un entier naturel vérifiant $0 \leq n \leq 50$. On définit les évènements suivants :

- A : « le jardinier a choisi le lot 1 »,
- B : « le jardinier a choisi le lot 2 »,
- J_n : « le jardinier obtient n tulipes jaunes ».

1. Dans cette question, on suppose que le jardinier choisit le lot 1.

a. Quelle loi de probabilité suit le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1 ?

b. Quelle est l'espérance mathématique de cette loi ?

c. Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

d. Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes. On donnera l'arrondi au millième du résultat.

2. Probabilités conditionnelles.

a. Montrer que : $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{J}_n) = \binom{50}{n} 2^{-50}$.

b. En déduire la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

c. On note p_n la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que J_n est réalisé. Etablir que : $p_n = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}}$.

d. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n > 0{,}9$? Comment peut-on interpréter ce résultat ?

<u>Am. du Sud 2006</u>

8 points

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1.$$

a. Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variation de f_n.

b. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\,;+\infty[$.

On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1\,;e]$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On note Γ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

a. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées (0 ; 1) et le point B_n de coordonnées (n ; 0).

b. Faire un croquis représentant la courbe Γ et les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

c. Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de Γ avec Δ_n.

d. Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n).

3. a. Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n.

b. Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que : $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.

c. Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n).

d. Montrer que la suite (α_n) converge. On note l sa limite. Établir que : $\ln l = 1$ et en déduire la valeur de l.

4. On désigne par D_n le domaine délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = \alpha_n$ et $x = e$.

a. Calculer l'aire du domaine D_n en fonction de α_n et montrer que cette aire est égale à $\frac{\alpha_n^2}{n}$.

b. Établir que : $(e - \alpha_n)\ln(\alpha_n) \leq \frac{\alpha_n^2}{n} \leq (e - \alpha_n)$.

c. En déduire un encadrement de $n(e - \alpha_n)$.

d. La suite de terme général $n(e - \alpha_n)$ est-elle convergente ? Ce résultat permet-il d'apprécier la rapidité de la convergence de la suite (α_n) ?