

N. Calédonie nov 2006

4 points

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5% de ce cheptel (ou 5 pour mille).

1. On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?
2. a. On choisit successivement et au hasard 10 animaux. On appelle  $X$  la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades parmi eux.

Montrer que  $X$  suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres. Calculer son espérance mathématique.

- b. On désigne par  $A$  l'évènement « aucun animal n'est malade parmi les 10 ».

On désigne par  $B$  l'évènement « au moins un animal est malade parmi les 10 ».

Calculer les probabilités de  $A$  et de  $B$ .

3. On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,9. On note  $T$  l'évènement « avoir un test positif à cette maladie » et  $M$  l'évènement « être atteint de cette maladie ».

- a. Représenter par un arbre pondéré les données de l'énoncé.
- b. Calculer la probabilité de l'évènement  $T$ .
- c. Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?

Correction

1.  $p(M) = 0,5\% = 0,005$ .

2. a. L'expérience est constituée des mêmes événements répétés indépendamment ; le nombre  $X$  d'animaux malades suit donc une loi binomiale de paramètres  $n = 10$  et  $p = 0,005$ .  $E(X) = np = 0,05$ .

- b.  $p(A) = p(X = 0) = 0,995^{10} \approx 0,95$ .  $p(B) = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - p(A) = 1 - 0,995^{10} \approx 0,05$ .

3.  $T$  « avoir un test positif à cette maladie » ;  $M$  « être atteint de cette maladie ».

- a. On a  $p_M(T) = 0,8$  d'où  $p_M(\bar{T}) = 1 - 0,8 = 0,2$  ;  $p_{\bar{M}}(\bar{T}) = 0,9$  d'où  $p_{\bar{M}}(T) = 0,1$ .

- b.  $p(T) = p(M \cap T) + p(\bar{M} \cap T) = p(M)p_M(T) + p(\bar{M})p_{\bar{M}}(T) = 0,005 \times 0,8 + 0,995 \times 0,1 = 0,1035$ .

- c.  $p_T(M) = \frac{p(T \cap M)}{p(T)} = \frac{p_M(T) \times p(M)}{p(T)} = \frac{0,8 \times 0,005}{0,1035} \approx 0,0386$ , soit environ 4 chances sur 100...

(Le test n'est pas très fiable en fait).

N. Calédonie nov 2006

5 points

Les parties A et B sont indépendantes.

On considère l'équation (E)  $z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0$  où  $z$  désigne un nombre complexe.

Partie A

1. a. Montrer que (E) admet une solution réelle, notée  $z_1$ .
- b. Déterminer les deux nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que, pour tout nombre complexe  $z$  on ait :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = (z - z_1)(z - 2 - 2i)(az + b).$$

2. Résoudre (E).

Partie B

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives 1,  $2 + 2i$  et  $1 - i$ .

1. Représenter  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
2. Déterminer le module et un argument de  $\frac{2+2i}{1-i}$ . En déduire la nature du triangle  $OBC$ .
3. Que représente la droite  $(OA)$  pour le triangle  $OBC$  ? Justifier votre affirmation.

4. Soit  $D$  l'image de  $O$  par la rotation d'angle  $-\frac{\pi}{2}$  et de centre  $C$ . Déterminer l'abscisse de  $D$ .

5. Quelle est la nature de  $OCDB$  ?

### **Correction**

Partie A

1. a. Soit  $x$  un réel solution, alors

$$x^3 - 4x^2 - ix^2 + 7x + ix - 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 7x - 4 + i(-x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 7x - 4 = 0 \\ -x^2 + x = 0 \end{cases}$$

d'où les possibilités  $x=0$  et  $x=1$  ; or 1 est la seule valeur qui marche dans les deux équations donc  $z_1 = 1$ .

$$b. (z-1)(z-2-2i)(az+b) = az^3 + \dots + (-1)(-2-2i)b \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b(2+2i) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow b = -1-i \text{ d'où}$$

$$z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = (z-1)(z-2-2i)(z-1-i).$$

2. On a donc les solutions 1,  $2+2i$  et  $1-i$ .

Partie B

$A$ ,  $B$  et  $C$  d'abscisses respectives 1,  $2+2i$  et  $1-i$ .

1. *Laissé au lecteur.*

$$2. \frac{z_B - z_O}{z_C - z_O} = \frac{2+2i}{1-i} = \frac{2(1+i)(1+i)}{1+1} = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}. \text{ donc le triangle } OBC \text{ est rectangle en } O.$$

$$3. (OA) \text{ est bissectrice de } OBC : \text{ on a } (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = -\frac{\pi}{4} \text{ et } (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4} \text{ (arguments de } 2+2i \text{ et } 1-i).$$

$$4. z_D - z_C = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_O - z_C) \Leftrightarrow z_D = 1-i-i(-1+i) = 1-i+i+1 = 2.$$

5.  $OCDB$  est un trapèze rectangle (bof...).

N. Calédonie nov 2006

5 points

Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{2}{u_n} \right)$ .

1. a. Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{2}{x} \right)$ . Étudier le sens de variation de  $f$ , et

tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  (on prendra comme unité 2 cm).

b. Utiliser le graphique précédent pour construire les points  $A_0, A_1, A_2$  et  $A_3$  de l'axe  $(O ; \vec{i})$  d'abscisses respectives  $u_0, u_1, u_2$  et  $u_3$ .

2. a. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul  $u_n \geq \sqrt{2}$ .

b. Montrer que pour tout  $x > \sqrt{2}$ ,  $f(x) \leq x$ .

c. En déduire que la suite  $(u_n)$  est décroissante à partir du rang 1.

d. Prouver qu'elle converge.

3. Soit  $l$  la limite de la suite  $(u_n)$ . Montrer que  $l$  est solution de l'équation  $x = \frac{1}{2} \left( x + \frac{2}{x} \right)$ . En déduire sa valeur.

N. Calédonie nov 2006

6 points

## Première partie

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère :

- les points  $A(0 ; 0 ; 3)$ ,  $E(2 ; 0 ; 4)$ ,  $C(-1 ; 1 ; 2)$  et  $D(1 ; -4 ; 0)$  ;
- les plans  $(P_1) : 7x + 4y - 3z + 9 = 0$  et  $(P_2) : x - 2y = 0$  ;
- les droites  $(d_1)$  et  $(d_2)$  définies par leurs systèmes d'équations paramétriques respectifs

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -8 + 2t \\ z = -10 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 7 + 2t' \\ y = 8 + 4t' \\ z = 8 - t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

	a	b	c	d
1. Le plan $(P_1)$ est	Le plan $(ABC)$	Le plan $(BCD)$	Le plan $(ACD)$	Le plan $(AED)$
2. La droite $(d_1)$ contient	Le point $A$	Le point $B$	Le point $C$	Le point $D$
3. Position relative de $(d_1)$ et de $(d_2)$	$(d_1)$ est strictement parallèle à $(P_1)$	$(d_1)$ est incluse dans $(P_1)$	$(d_1)$ coupe $(P_1)$	$(d_1)$ est orthogonale à $(P_1)$
4. Position relative de $(d_1)$ et de $(d_2)$	$(d_1)$ est strictement parallèle à $(d_2)$	$(d_1)$ et $(d_2)$ sont confondues	$(d_1)$ et $(d_2)$ sont sécantes	$(d_1)$ et $(d_2)$ sont non coplanaires.
5. L'intersection de $(P_1)$ et de $(P_2)$ est une droite dont une représentation paramétrique est	$\begin{cases} x = t \\ y = -2 + \frac{1}{2}t \\ z = 3t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 5t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$	$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -3t \end{cases}$

## Deuxième partie

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère la droite  $(D)$  passant par  $A(0 ; 0 ; 3)$  et dont un vecteur directeur est  $\vec{u} (1 ; 0 ; -1)$  et la droite

$(D')$  passant par  $B(2 ; 0 ; 4)$  et dont un vecteur directeur est  $\vec{v} (0 ; 1 ; 1)$ .

L'objectif est de démontrer qu'il existe une droite unique perpendiculaire à la fois à  $(D)$  et à  $(D')$ , de la déterminer et de dégager une propriété de cette droite.

- On considère un point  $M$  appartenant à  $(D)$  et un point  $M'$  appartenant à  $(D')$  définis par  $\overrightarrow{AM} = a\vec{u}$  et  $\overrightarrow{BM'} = b\vec{v}$ , où  $a$  et  $b$  sont de nombres réels.

Exprimer les coordonnées de  $M$ , de  $M'$  puis du vecteur  $\overrightarrow{MM'}$  en fonction de  $a$  et  $b$ .

- Démontrer que la droite  $(MM')$  est perpendiculaire à  $(D)$  et à  $(D')$  si et seulement si le couple  $(a ; b)$  est solution du système 
$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + 2b = -1 \end{cases}.$$

- Résoudre ce système. En déduire les coordonnées des deux uniques points  $M$  et  $M'$ , que nous noterons ici  $H$  et  $H'$ , tels que la droite  $(HH')$  soit bien perpendiculaire commune à  $(D)$  et à  $(D')$ .

Montrer que  $HH' = \sqrt{3}$  unités de longueur.

- On considère un point  $M$  quelconque de la droite  $(D)$  et un point  $M'$  quelconque de la droite  $(D')$ .

a. En utilisant les coordonnées obtenues à la question 1, démontrer que

$$MM'^2 = (a+b)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 + 3.$$

b. En déduire que la distance  $MM'$  est minimale lorsque  $M$  est en  $H$  et  $M'$  est en  $H'$ .