Pondichéry

1. Exercice 1

4 points

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère le plan P d'équation $2x+y-2z+4=0$ et les points A de coordonnées $(3,2,6)$, B de coordonnées $(1,2,4)$ et C de coordonnées $(4,-2,5)$.

1. a. Vérifier que les points *A*, *B* et *C* définissent un plan.

b. Vérifier que ce plan est P.

2. a. Montrer que le triangle *ABC* est rectangle.

b. Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par *O* et perpendiculaire au plan P.

c. Soit *K* le projeté orthogonal de *O* sur P. Calculer la distance *OK*.

d. Calculer le volume du tétraèdre *OABC*.

3. On considère dans cette question le système de points pondérés $S=\{(O,3),(A,1),(B,1),(C,1)\}$.

a. Vérifier que ce système admet un barycentre qu'on notera *G*.

b. On note *I* le centre de gravité du triangle *ABC*. Montrer que *G* appartient à (OI).

c. Déterminer la distance de *G* au plan P.

4. Soit Γ l'ensemble des points *M* de l'espace vérifiant $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$. Déterminer Γ. Quelle est la nature de l'ensemble des points communs à P et Γ ?

2. Exercice 2 (spécialistes)

5 points

1. Dans cette question il est demandé au candidat d'exposer des connaissances.

On suppose connus les résultats suivants :

- la composée de deux similitudes planes est une similitude plane ;
- la transformation réciproque d'une similitude plane est une similitude plane ;
- une similitude plane qui laisse invariants trois points non alignés du plan est l'identité du plan.

Soient *A*, *B*, *C* trois points non alignés du plan et *s* et *s*' deux similitudes du plan telles que :

$$s(A)=s'(A),\ s(B)=s'(B),\ s(C)=s'(C).$$

Montrer que $s=s'$.

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. La figure sera complétée au fur et à mesure. On donne les points *A* d'affixe 2, *E* d'affixe $1+i$, *F* d'affixe $2+i$ et *G* d'affixe $3+i$.

a. Calculer les longueurs des côtés des triangles *OAG* et *OEF*. En déduire que ces triangles sont semblables.

b. Montrer que *OEF* est l'image de *OAG* par une similitude indirecte *S*, en déterminant l'écriture complexe de *S*.

c. Soit *h* l'homothétie de centre *O* et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On pose $A'=h(A)$ et $G'=h(G)$, et on appelle *I* le milieu de [*EA*']. On note σ la symétrie orthogonale d'axe (OI). Montrer que $S=\sigma\circ h$.

3. Exercice 2 (non spécialistes)

5 points

1. Dans cette question il est demandé au candidat d'exposer des connaissances.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Soit R la rotation du plan de centre Ω, d'affixe ω et d'angle de mesure θ. L'image par R d'un point du plan est donc définie de la manière suivante :

- $R(\Omega)=\Omega$;
- pour tout point M du plan, distinct de Ω, l'image M' de M est définie par $\Omega M'=\Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\theta[2\pi]$.

On rappelle que pour des points A et B d'affixes respectives a et b, $AB=|b-a|$ et $\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)=\arg(b-a)[2\pi]$.

Question : montrer que les affixes z et z' d'un point quelconque M du plan et de son image M' par la rotation R sont liées par la relation

$$z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega).$$

2. On considère les points I et B d'affixes respectives $z_I=1+i$ et $z_B=2+2i$. Soit R la rotation de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$.

a. Donner l'écriture complexe de R.

b. Soit A l'image de I par R. Calculer l'affixe z_A de A.

c. Montrer que O, A et B sont sur un même cercle de centre I. En déduire que OAB est un triangle rectangle en A. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

d. En déduire une mesure de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{OA}\right)$.

3. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{IO}$. On pose $A'=T(A)$.

a. Calculer l'affixe $z_{A'}$ de A'.

b. Quelle est la nature du quadrilatère $OIAA'$?

c. Montrer que $-\dfrac{\pi}{12}$ est un argument de $z_{A'}$.

4. Exercice 3

5 points

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$. Etudier le signe de sa fonction dérivée f', sa limite éventuelle en $+\infty$ et dresser le tableau de ses variations.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par son terme général $u_n=\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

a. Justifier que, si $n\leq x\leq n+1$, alors $f(n+1)\leq f(x)\leq f(n)$.

b. Montrer, sans chercher à calculer u_n, que pour tout entier naturel n, $f(n+1)\leq u_n\leq f(n)$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit F la fonction définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $F(x)=\left[\ln(x+3)\right]^2$.

a. Justifier la dérivabilité de F sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et déterminer pour tout réel positif x le nombre $F'(x)$.

b. On pose, pour tout entier naturel n, $I_n=\int_0^n f(x)\,dx$. Calculer I_n.

4. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}$.

Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ?

5. Exercice 4

6 points

Pour réaliser une enquête, un employé interroge des personnes prises au hasard dans une galerie commerçante. Il se demande si trois personnes au moins accepteront de répondre.

1. Dans cette question on suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard accepte de répondre est 0,1. L'employé interroge au hasard 50 personnes de manière indépendante. On considère les événements :

A : « au moins une personne accepte de répondre » ;

B : » moins de trois personnes acceptent de répondre » ;

C : « trois personnes ou plus acceptent de répondre ».

Calculer les probabilités des événements A, B et C. On arrondira au millième.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Dans cette question on suppose que la variable aléatoire X qui, à tout groupe de n personnes interrogées iondépendamment, associe le nombre de personnes ayant accepté de répondre, suit la loi de probabilité définie par :

Pour tout entier k tel que $0\le k\le n-1$, $P(X=k)=\dfrac{e^{-a}a^k}{k!}$ et $P(X=n)=1-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{e^{-a}a^k}{k!}$,

formules dans lesquelles $a=\dfrac{n}{10}$.

a. Montrer que la probabilité qu'au moins trois personnes répondent est donnée par :

$$f(a)=1-e^{-a}\left(1+a+\frac{a^2}{2}\right).$$

b. Calculer $f(5)$. En donner l'arrondi au millième. Cette modélisation donne-t-elle un résultat voisin de celui obtenu à la question 1 ?

3. On conserve le modèle de la question 2. On souhaite déterminer le nombre minimum de personnes à interroger pour que la probabilité que trois d'entre elles au moins répondent soit supérieure ou égale à 0,95.

a. Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=1-e^{-x}\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)$ ainsi que sa limite en $+\infty$. Dresser son tableau de variation.

b. Montrer que l'équation $f(x)=0{,}95$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}^+$ et que cette solution est comprise entre 6,29 et 6,3.

c. En déduire le nombre minimum de personnes à interroger.