

Amérique du Nord

Correction

1. Exercice 1

1. (P) $2x + y - 3z + 1 = 0$; $A(1; 11; 7)$.

Proposition 1 : « Le point H , projeté orthogonal de A sur (P) a pour coordonnées $(0; 2; 1)$. »

Calculons $\overrightarrow{AH} = (-1; -9; -6)$ et le vecteur normal à (P) : $\vec{n} = (2; 1; -3)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc c'est **faux**.

Nota : on peut chercher les coordonnées de H : comme H est le projeté orthogonal de A sur (P), alors

\overrightarrow{AH} et \vec{n} sont colinéaires. Il existe donc un réel k tel que $\overrightarrow{AH} = k \vec{n}$, c'est-à-dire
$$\begin{cases} x_H - 1 = 2k \\ y_H - 11 = k \\ z_H - 7 = -3k \end{cases} \quad \text{ou}$$

encore
$$\begin{cases} x_H = 1 + 2k \\ y_H = 11 + k \\ z_H = 7 - 3k \end{cases} \quad (1).$$
 De plus, H appartient à (P), alors : $2(1 + 2k) + (11 + k) - 3(7 - 3k) + 1 = 0$,

$14k - 7 = 0$. On en déduit que $k = \frac{1}{2}$. En remplaçant dans (1), on obtient $\left(2; \frac{23}{2}; \frac{11}{2}\right)$.

2. (E) : $y' = 2 - 2y$.

Proposition 2 : « On a $u\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = \frac{1}{2}$. »

Les solutions de (E) sont $u(x) = Ce^{-2x} - \frac{2}{-2} = Ce^{-2x} + 1$; avec $u(0) = 0$ on a $C = -1$ et

$u\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = 1 - e^{-\frac{2 \ln 2}{2}} = 1 - \frac{1}{e^{\ln 2}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ donc **vrai**.

3. $u_0 = 2$; $u_{n+1} = \sqrt{7u_n}$.

Proposition 3 : « Pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_n \leq 7$. »

$u_n \geq 0$ est évident ; par récurrence : $u_0 = 2 \leq 7$ et $u_n \leq 7 \Leftrightarrow 7u_n \leq 49 \Rightarrow \sqrt{7u_n} \leq \sqrt{49} = 7$ donc **vrai**.

2. Exercice 2 (non spécialistes)

1. a. $z_A = i$; $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$. $r: z \rightarrow z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$.

b. $z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ $z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{-i\frac{5\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

c. $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$; $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

d. Figure ci-dessous.

2. a. $z_D = \frac{1}{2-1+2} (2z_A - z_B + 2z_C) = \frac{1}{3} \left(2i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \sqrt{3} - i \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

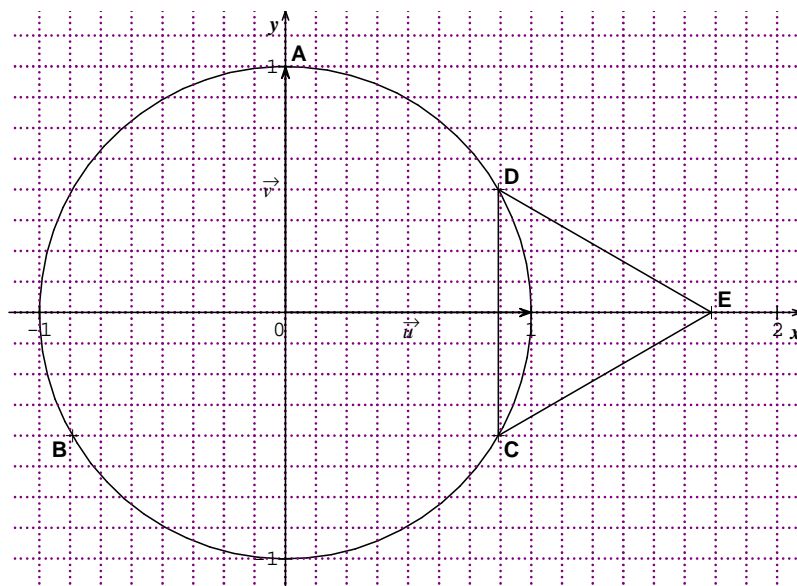
b. Tous ces points sont sur le cercle trigonométrique car leur module est 1.

3. a. $h: z \rightarrow z' \mid z' - i = 2(z - i) \Leftrightarrow z' = 2z - i$.

b. $z_E = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - i = \sqrt{3}$.

4. a. $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{2i}{\sqrt{3} + i} = \frac{2i(\sqrt{3} - i)}{4} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b. Le triangle CDE est équilatéral : $CD = CE$ et $(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{3}$.



3. Exercice 2 (spécialistes)

1. $z' = (2 - 2i)z + 1$: similitude directe $2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc rapport $2\sqrt{2}$, angle $-\frac{\pi}{4}$. Le centre est tel que $\omega = (2 - 2i)\omega + 1 \Leftrightarrow \omega(-1 + 2i) = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{-1 - 2i}{5}$.

2. a. $b' = f(b) = (2 - 2i)(-4 + 2i) + 1 = -8 + 8i + 4i + 4 + 1 = -3 + 12i$.

b. $\frac{b' - c}{a - c} = \frac{-3 + 12i - 1 - 4i}{3 + 5i - 1 - 4i} = \frac{-4 + 8i}{2 + i} = \frac{(-4 + 8i)(2 - i)}{5} = \frac{20i}{5} = 4i$ donc $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB'}) = \arg(4i) = \frac{\pi}{2}$.

3. $\overrightarrow{CM'} \cdot \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} x' - 1 \\ y' - 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2(x' - 1) + y' - 4 = 2x' + y' - 6$.

Par ailleurs $z' = (2 - 2i)z + 1 \Leftrightarrow x' + iy' = (2 - 2i)(x + iy) + 1 = 2x + 2y + 1 + i(-2x + 2y)$.

On remplace et on annule : $2(2x + 2y + 1) - 2x + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x + 6y - 4 = 0 \Leftrightarrow x + 3y = 2$.

4. a. $(-4; 2)$ est une solution de (E) : $-4 + 3 \times 2 = 2$.

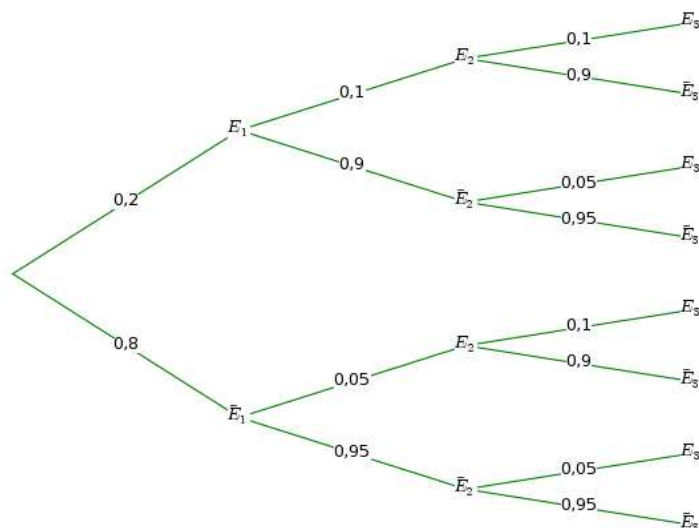
b. $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ -4 + 3(2) = 2 \end{cases} \Rightarrow x + 4 + 3(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 1(x + 4) = 3(2 - y) \Rightarrow \begin{cases} x + 4 = 3k \\ 2 - y = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k - 4 \\ y = 2 - k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$.

$$c. \begin{cases} -5 \leq 3k-4 \leq 5 \\ -5 \leq 2-k \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 3k \leq 9 \\ -7 \leq -k \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1/3 \leq k \leq 3 \\ -3 \leq k \leq 7 \end{cases} \Rightarrow k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

d'où les quatre points : $(-4; 2), (-1; 1), (2; 0), (5; -1)$.

4. Exercice 3

1. a. X prend les valeurs 0, 1, 2, 3.



b. Si on note G lorsqu'il gagne et P lorsqu'il perd : $(X = 2)$ revient à PPG, PGP ou GPP.

$$p(\text{PPG}) = p(P)p_P(P)p_P(G) = 0,2 \times 0,1 \times (1 - 0,1) = 0,018 ;$$

$$p(\text{PGP}) = p(P)p_P(G)p_G(P) = 0,2 \times (1 - 0,1) \times 0,05 = 0,009 ;$$

$$p(\text{GPP}) = p(G)p_G(P)p_P(P) = 0,8 \times 0,05 \times 0,1 = 0,004, \text{ soit au total } 0,031.$$

$$(X = 3) \text{ revient à PPP : } p(\text{PPP}) = p(P)p_P(P)p_P(P) = 0,2 \times 0,1 \times 0,1 = 0,002.$$

c. Il manque $(X = 0)$: $p(\text{GGG}) = p(G)p_G(G)p_G(G) = 0,8 \times (1 - 0,05) \times (1 - 0,05) = 0,722$ et $(X = 1)$:
 $p(X = 1) = 1 - 0,722 - 0,031 - 0,002 = 0,245$.

$$d. E(X) = 0,245 + 0,062 + 0,006 = 0,313.$$

$$2. a. p(E_n \cap E_{n+1}) = p_{E_n}(E_{n+1}) \times p(E_n) = 0,1p_n ; p(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = p_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) \times p(\overline{E_n}) = 0,05(1 - p_n).$$

$$b. p_{n+1} = p(E_{n+1}) = p(E_n \cap E_{n+1}) + p(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = 0,1p_n + 0,05 - 0,05p_n = 0,05p_n + 0,05.$$

$$3. a. u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{19} = 0,05p_n + 0,05 - \frac{1}{19} = 0,05\left(u_n + \frac{1}{19}\right) + 0,05 - \frac{1}{19} = 0,05u_n. \text{ La raison est } 0,05, \text{ le premier terme est } u_0 = p_0 - \frac{1}{19} = 0,2 - \frac{1}{19} = \frac{2,8}{19}.$$

$$b. \text{ On a donc } u_n = u_0 \times 0,05^n \Rightarrow p_n = u_0 \times 0,05^n + \frac{1}{19}.$$

$$c. \text{ Comme } 0,05 < 1 \text{ } u_n \text{ tend vers } 0 \text{ et } p_n \text{ tend vers } \frac{1}{19}.$$

5. Exercice 4

1. On numérote les propriétés :

Terminale S

(1) la fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et est égale à sa fonction dérivée ;

(2) $e^0 = 1$;

(3) pour tout réel x , on a $e^x > x$;

(4) soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[A; +\infty[$ où A est un réel positif. Si, pour tout x de $[A; +\infty[$, on a $\psi(x) \leq \varphi(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

a. La dérivée de g est $g'(x) = e^x - x$ (utilisation de (1)) qui est positive (utilisation de (2)) ; par ailleurs $g(0) = 1$ (utilisation de (3)), soit $g(x) \geq 1$ et donc $g(x) \geq 0$.

b. On a donc $e^x \geq \frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$; comme $\frac{x}{2}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (utilisation de (4)).

2. $f(x) = \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}$.

a. L'exponentielle est toujours positive ; sur $[0; +\infty[$, il en est de même de $\frac{1}{4}x$ donc $f(x) \geq 0$.

b. On pose $X = \frac{x}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(x) = \frac{1}{2} \lim_{X \rightarrow +\infty} X e^{-X} = 0$ (croissances comparées). La courbe de f admet l'axe (Ox) comme asymptote horizontale.

c. $f'(x) = \frac{1}{4} \left[e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} x e^{-\frac{x}{2}} \right] = \frac{1}{8} [2 - x] e^{-\frac{x}{2}}$ donc positive avant 2, négative après. $f(2) = \frac{1}{2} e^{-1} = \frac{1}{2e}$.

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$\nearrow \frac{1}{2e}$	$\searrow 0$

3. a. $F'(x) = f(x)$ (cours...) qui est positive sur $[0; +\infty[$ comme le montre le tableau de variation.

b. Soit on intègre par parties, soit on dérive $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}}$ en vérifiant que $F(0) = 0$.

$F(0) = 1 - e^0 - 0e^0 = 1 - 1 = 0$; $F'(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} - \left[\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-\frac{x}{2}} \right] = \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}} = f(x)$.

c. Tous les termes contenant $e^{-\frac{x}{2}}$ tendent vers 0 donc F tend vers 1.

x	0	$+\infty$
$f(x)$		+
$F(x)$	0	$\nearrow 1$

d. F est monotone strictement croissante, continue sur $[0; +\infty[$; $0 < 0,5 < 1$, il existe donc un unique α dont l'image par F est 0,5. La calculatrice donne : $f(3,35) \approx 0,499$ et $f(3,36) \approx 0,501$; on prend $\alpha \approx 3,36$.

4. $A_n = F(n) - F(0) = F(n)$; on a donc $A_n \geq 0,5$ lorsque $n \geq \alpha$, soit pour $n = 4$.