Antilles - Guyane

1. Exercice 1

6 points

Question de cours

Prérequis : positivité et linéarité de l'intégrale.

Soient a et b deux réels d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur I telles que pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) > g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dt \geq \int_a^b g(x)\,dt$.

Partie A

1. Soit x un réel supérieur ou égal à 1. Calculer en fonction de x l'intégrale $\int_1^x (2-t)\,dt$.

2. Démontrer que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[1\,;+\infty[$, on a : $2-t \leq \frac{1}{t}$.

3. Déduire de ce qui précède que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a : $-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2} \leq \ln x$.

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}$.

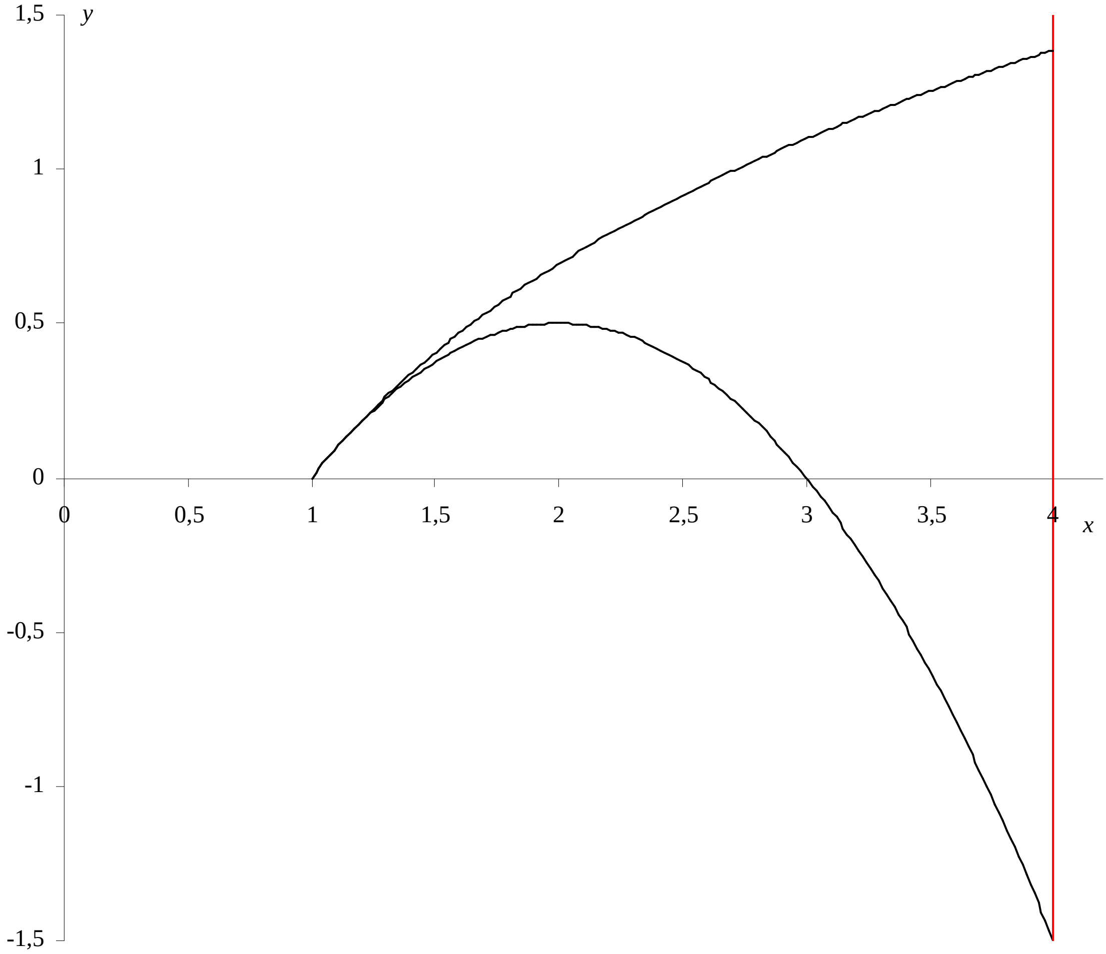
Sur le graphique joint en annexe, le plan estmuni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ dans lequel on a tracé les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien sur l'intervalle [1 ; 4]. On a a tracé également la droite (d) d'équation $x = 4$.

1. a. Démontrer que $\int_1^4 h(x)\,dx = 0$.

b. Illustrer sur le graphique le résultat de la question précédente.

2. On note D le domaine du plan délimité par la droite (d) et les courbes représentatives des fonction h et logarithme népérien sur l'intervalle [1 ; 4].

En utilisant un intégration par parties, calculer l'aire de D en unités d'aire.



2. Exercice 2 (non spécialistes)

5 points

$(O\,;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe. Soit A le point d'affixe $1 + i$.

Au point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{1}{2}(z + i\bar{z})$.

1. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x' et y' réels.

a. Démontrer les égalités suivantes : $x' = \frac{1}{2}(x+y)$ et $y' = \frac{1}{2}(x+y)$. En déduire que le point M' appartient à la droite (OA).

b. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $M = M'$.

c. Démontrer que pour tout point M du plan les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont orthogonaux.

2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. M_1 est le point d'affixe z_1 image de M par r, M_2 le point d'affixe $z_2 = \bar{z}$, M_3 le point d'affixe z_3 tel que le quadrilatère $OM_1M_3M_2$ soit un parallélogramme.

a. Dans cette question uniquement M a pour affixe $4 + i$, placer les points M, M_1, M_2, M_3.

b. Exprimer z_1 en fonction de z, puis z_3 en fonction de z.

c. $OM_1M_3M_2$ est-il un losange ? Justifier.

d. Vérifier que $z'-z=\frac{1}{2}iz_3$. En déduire que $MM'=\frac{1}{2}OM_3$.

3. Démontrer que les points M, M_1, M_2 et M_3 appartiennent à un même cercle de centre O si et seulement si $MM'=\frac{1}{2}OM$.

Donner alors la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{M'OM}$.

3. Exercice 2 (spécialistes)

5 points

$(O\,;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique 1 cm). On considère le point A d'affixe $z=1+i$. On note S_1 la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $(O\,;\vec{u})$ et h l'homothétie de centre O et de rapport 3. On pose $s=h\circ S_1$.

Partie A

1. Placer le point A et compléter la figure au fur et àmesure.
2. Quelle est la nature de la transformation s ? Justifier.
3. Déterminer l'écriture complexe de la transformation s.
4. a. Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par s.

b. Montrer que $z_B=-3iz_A$. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

5. Soient M le milieu de $[AB]$ et P l'image de M par s. Montrer que la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (AB).

Partie B

1. On pose $C=s(B)$.Montrer que P est le milieu de $[BC]$.
2. a. Déterminer l'écriture complexe de $s\circ s$ et en déduire sa nature.

b. Montrer que l'image de la droite (OP) par s est la droite (OM).

c. Que représente le point M pour le triangle OBP ? Justifier.

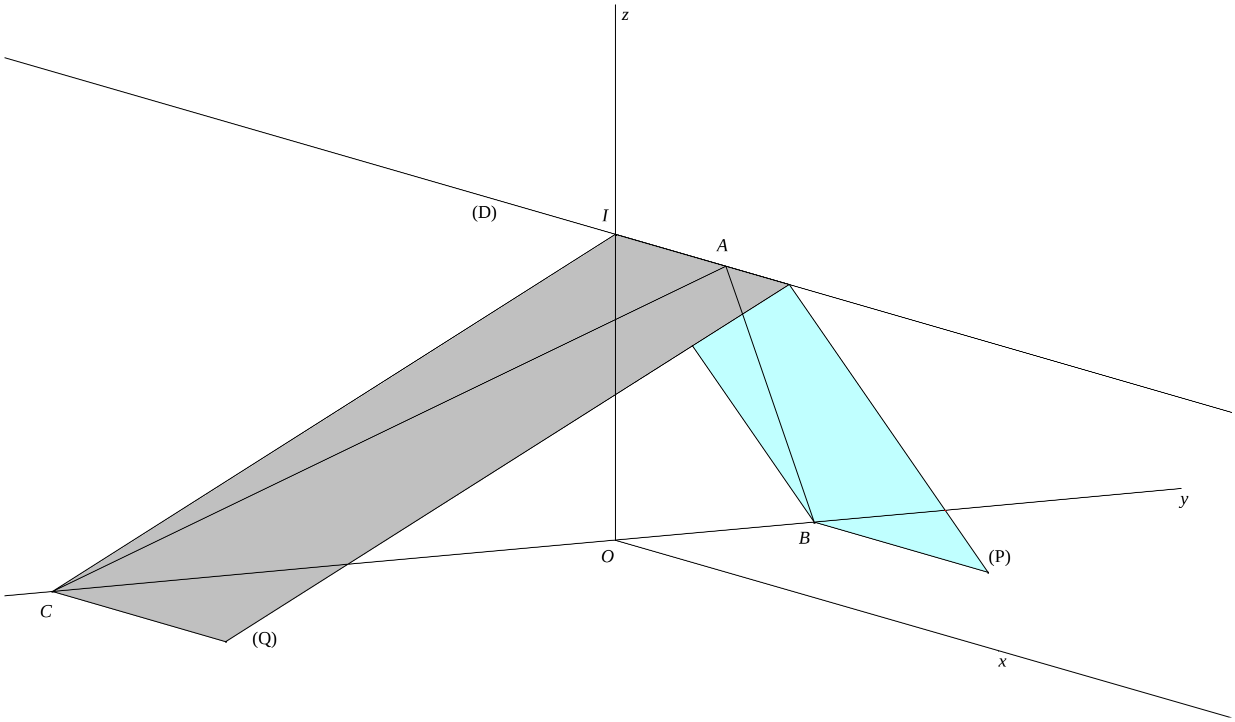
4. Exercice 3

5 points

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points A(3 ; 0 ; 6) et I(0 ; 0 ; 6) ; on appelle (D) la droite passant par A et I.

On appelle (P) le plan d'équation $2y+z-6=0$ et (Q) le plan d'équation $y-2z+12=0$.

1. Démontrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires.
2. Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est la droite (D).
3. Démontrer que (P) et (Q) coupent l'axe $\left(O\,;\vec{j}\right)$ et déterminer les coordonnées des points B et C, intersections respectives de (P) et (Q) avec l'axe $\left(O\,;\vec{j}\right)$.
4. Démontrer qu'une équation du plan (T) passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$ est $x+4y+2z-12=0$.
5. Donner une représentation paramétrique de la droite (OA). Démontrer que la droite (OA) et le plan (T) sont sécants en un point H dont on déterminera les coordonnées.
6. Que représente le point H pour le triangle ABC ? Justifier.



5. *Exercice 4*

5 points

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro et la lettre de la question ainsi que la valeur correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte aux questions 1 *et* 2 *rapporte 0,5 point et à la question* 3 *rapporte* 1 *point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

On s'intéresse à deux types de pièces électroniques, P_1 et P_2, qui entrent dans la fabrication d'une boîte de vitesses automatique.

Une seule pièce de type P_1 et une seule pièce de type P_2 sont nécessaires par boîte.

L'usine se fournit auprès de deux sous-traitants et deux seulement : S_1 et S_2.

Le sous-traitant S_1 produit 80 % des pièces de type P_1 et 40 % de pièces de type P_2.

Le sous-traitant S_2 produit 20 % des pièces de type P_1 et 60 % de pièces de type P_2.

1. Un employé de l'usine réunit toutes les pièces P_1 et P_2 destinées à être incorporées dans un certain nombre de boîtes de vitesses. Il y a donc autant de pièces de chaque type.

Il tire une pièce au hasard.

a. La probabilité que ce soit une pièce P_1 est :

0,8	0,5	0,2	0,4	0,6

b. La probabilité que ce soit une pièce P_1 et qu'elle vienne de S_1 est :

0,1	0,2	0,3	0,4	0,5

c. La probabilité qu'elle vienne de S_1 est

0,2	0,4	0,5	0,6	0,8

2. Il y a 200 pièces au total. Cette fois l'employé tire deux pièces simultanément. On suppose tous les tirages équiprobables.

a. Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité que ce soit deux pièces P_1 est :

0,1588	0,2487	0,1683	0,0095

b. Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité que ce soit deux pièces P_1 et P_2 est :

0,5000	0,2513	0,5025

c. La probabilité que ce soient deux pièces fabriquées par le même fournisseur est :

$\frac{357}{995}$	$\frac{103}{199}$	$\frac{158}{995}$

3. La durée de vie exprimée en années des pièces P_1 et P_2 suit une loi exponentielle dont le paramètre λ est donné dans le tableau suivant :

λ	P_1	P_2
S_1	0,2	0,25
S_2	0,1	0,125

On rappelle que si X, durée de vie d'une pièce exprimée en années, suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx$.

Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'une pièce P_1 fabriquée par S_1 dure moins de 5 ans est :

0,3679	0,6321