Polynésie Correction

1. Exercice 1

Partie A

1. $p(\text{G}) = p(\text{B}) \times p(\,dé < 6\,) + p(\text{N}) \times p(\,dé = 6\,) = \frac{1}{10} \times \frac{5}{6} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{30}$.

2. $p_{\text{P}}(\text{B}) = \frac{p(\text{Blanc et Perdu})}{p(\text{P})} = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{6}}{1 - \frac{7}{30}} = \frac{1}{60} \times \frac{30}{23} = \frac{1}{46}$.

3. Loi binomiale : $n = 4$, $p = \frac{7}{30}$; il en gagne 2 avec la probabilité $\binom{4}{2}\left(\frac{7}{30}\right)^2\left(\frac{23}{30}\right)^2 \approx 0{,}192$.

4. Loi binomiale : n quelconque, $p = \frac{7}{30}$; $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\frac{23}{30}\right)^n$; on a alors

$$p(X \geq 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{23}{30}\right)^n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{23}{30}\right) \leq \ln(0{,}01) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{23}{30}\right)} = 17{,}3$$

d'où $n = 18$.

Partie B

1. a. X prend les valeurs −1 et 4 ; $p(X = -1) = p(\text{P}) = \frac{23}{30}$, $p(X = 4) = p(\text{G}) = \frac{7}{30}$.

$E(X) = -\frac{23}{30} + 4\frac{7}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

b. L'organisateur en semble pas très matheux…

2. Il faut recalculer $p(\text{G}) = p(\text{B}) \times p(\,dé < 6\,) + p(\text{N}) \times p(\,dé = 6\,) = \frac{1}{n+1} \times \frac{5}{6} + \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{6} = \frac{5+n}{6(n+1)}$ d'où

$E(X) = -1 \times \left(1 - \frac{5+n}{6(n+1)}\right) + 4 \times \frac{5+n}{6(n+1)} = \frac{-(6n+6-5-n)+20+4n}{6(n+1)} = \frac{-n+19}{6(n+1)}$ qui sera positif lorsque $n \leq 19$.

2. Exercice 2

1. $\bar{z} - 3iz - 3 + 6i = 0 \Leftrightarrow (x - iy) - 3i(x + iy) - 3 + 6i = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 3 + i(-y - 3x + 6) = 0$, soit

$$\begin{cases} x + 3y - 3 = 0 \\ -3x - y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3y + 3 \\ 8y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{3}{8},\ x = \frac{-9+24}{8} = \frac{15}{8} \text{ et } z = \frac{15}{8} + i\frac{3}{8}.$$

2. OAB est un triangle équilatéral de sens direct si A a pour image B par la rotation de centre O, d'angle $\frac{\pi}{3}$.

$$r : z \to z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z \Rightarrow b = e^{i\frac{\pi}{3}}(4 - 2i) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(4 - 2i) = 2 + \sqrt{3} + i\left(2\sqrt{3} - 1\right).$$

3. a. $\arg(z-2i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi \Leftrightarrow (\vec{u}\,;\overrightarrow{DM})=\frac{\pi}{4}+2k\pi$; il s'agit de la demi-droite faisant un angle de 45° avec l'horizontale, passant par D et orientée vers la droite.

b. $z=2i+2e^{i\theta} \Leftrightarrow z-2i=2e^{i\theta} \Leftrightarrow |z-2i|=2$: il s'agit du cercle de rayon 2 et de centre D.

4. $|z'|=1 \Leftrightarrow |z-1|=|\bar{z}+2|=|\overline{z+2}|=|z+2|$ car le module du conjugué est le même que celui de l'original. Il s'agit du cercle de diamètre IJ où I a pour affixe 1 et J a pour affixe −2 privé des points I et J.

3. Exercice 3 (non spécialistes)

On considère les points $A\left(\frac{2}{3}\,;-3\,;2\right)$ et $B\left(-\frac{4}{3}\,;0\,;-4\right)$. On note I le milieu du segment $[AB]$ et (S) la sphère de diamètre $[AB]$.

1. Soit E le barycentre des points pondérés $(A\,;2)$ et $(B\,;1)$.

a. $x_E=\frac{1}{3}\left(2\times\frac{2}{3}+1\times-\frac{4}{3}\right)=0$, $y_E=-2$, $z_E=0$.

b. $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MO}\right\| \Leftrightarrow 3ME=3MO \Leftrightarrow ME=MO$, (P) est le plan médiateur du segment $[OE]$.

c. $ME=MO \Leftrightarrow (x-0)^2+(y+2)^2-(z-0)^2=(x-0)^2+(y-0)^2-(z-0)^2 \Leftrightarrow y^2+4y+4=y^2$ donc une équation du plan (P) est $y=-1$.

2. a. I a pour coordonnées : $\left(-\frac{1}{3}\,;-\frac{3}{2}\,;-1\right)$. Le rayon de (S) est $\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{4+9+36}=\frac{7}{2}$; $d(I,\mathrm{P})=\frac{\left|-\frac{3}{2}+1\right|}{1}=\frac{1}{2}$. Comme cette distance est inférieure au rayon de (S), il y a intersection.

b. On fait l'intersection entre (S) et (P) : $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+(z+1)^2=\frac{49}{4}$ et $y=-1$, soit

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(-1+\frac{3}{2}\right)^2+(z+1)^2=\frac{49}{4} \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2=\frac{49}{4}-\frac{1}{4}=12.$$

Le centre de (C) est le point $\left(-\frac{1}{3}\,;-1\,;-1\right)$, le rayon est $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

3. Soit D le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3}\,;-\frac{1}{2}\,;4\sqrt{3}-1\right)$.

a. $\overrightarrow{IM}=t\overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1/3=t\times 0 \\ y+3/2=t\times 1 \\ z+1=t\times 4\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1/3 \\ y=-3/2+t \\ z=-1+t4\sqrt{3} \end{cases}$.

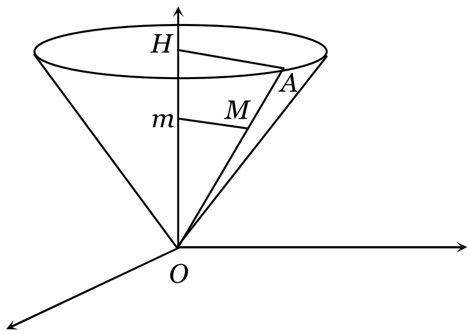
b. On remplace dans l'équation de (C) : $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2=12 \Rightarrow 0+48t^2=12 \Rightarrow t=\pm\frac{1}{2}$, soit les points $\begin{cases} x=-1/3 \\ y=-2 \\ z=-1-2\sqrt{3} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=-1/3 \\ y=-1 \\ z=-1+2\sqrt{3} \end{cases}$, mais seul le second est dans le plan (P) !

4. Exercice 3 (spécialistes)

Partie A

$A(1\,;3\,;2)$, $B(4\,;6\,;-4)$ et le cône (Γ) d'axe $\left(O\,;\vec{k}\right)$, de sommet *O* et contenant le point *A*.

1.



Rien de tel qu'une figure : le triangle *OHA* est rectangle en *H* de coordonnées $(0\,;0\,;2)$; même chose pour *OmM*, soit avec Thalès : $\dfrac{Om}{OH}=\dfrac{OM}{OA}\Leftrightarrow\dfrac{z^2}{4}=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{14}\Leftrightarrow\dfrac{7z^2-2z^2}{28}=\dfrac{x^2+y^2}{14}\Leftrightarrow\dfrac{5z^2}{2}=x^2+y^2$.

2. a. Un vecteur normal à (P) est $\vec{k}$: $\overrightarrow{BM}.\vec{k}=0\Leftrightarrow z+4=0$.

b. Comme l'axe du cône est orienté par $\vec{k}$, perpendiculaire à (P), l'intersection (C_1) est un cercle à l'altitude $z=-4$. Son équation est $x^2+y^2=40$.

3. L'intersection est une parabole car le plan $y=3$ est vertical.

Partie B

1. a. Pour résoudre l'équation (E) : $x^2+y^2=40$ on prend la calculette et on cherche les couples qui marchent. On trouve alors (2 ; 6) et (6 ; 2).

0	6,32455532
1	6,244998
2	6
3	5,56776436
4	4,89897949
5	3,87298335
6	2
7	impossible

b. Il y a les points $(2\,;6\,;-4)$ et $(6\,;2\,;-4)$.

2. a. Equation de (Γ) : $\dfrac{5z^2}{2}=x^2+y^2$; il faut donc que 2 divise z^2 puisqu'il ne divise pas 5, on a alors $2z'=z$ et $\dfrac{20z'^2}{2}=x^2+y^2\Leftrightarrow 10z'^2=x^2+y^2$ d'où x^2+y^2 est divisible par 10.

b. Si *M* est un point de (C_2) alors $y=3$ d'où $x^2+y^2=10k\Leftrightarrow x^2=10k-9=1+10(k-1)$ donc $x^2\equiv 1\text{ modulo }10$.

c. $x^2\equiv 1\text{ modulo }10$: on teste les valeurs des résidus modulo 10 : il y a uniquement 1 et 9 qui élevés au carré donnent 1 modulo 10.

résidu	carré modulo 10
0	0

1	1
2	4
3	9
4	6
5	5
6	6
7	9
8	4
9	1

d. $10z'^2 = 1^2 + 9 = 10 \Leftrightarrow z' = \pm 1 \Rightarrow z = \pm 2$, on a donc un autre point : $A'(1\,;3\,;-2)$;

$10z'^2 = 9^2 + 9 = 90 \Leftrightarrow z' = \pm 3 \Rightarrow z = \pm 6$ et donc deux autres points : $(9\,;3\,;-6), (9\,;3\,;6)$, mais il y en a d'autres encore, obtenus en chageant les divers signes.

5. *Exercice 4*

Partie A

1. a. $\ln x > 0$ sur $[1\,;2]$ donc f est positive sur $[1\,;2]$.

b. M a pour coordonnées $(1\,;1)$, N $(2\,;1+2\ln 2)$; le coefficient directeur de la droite (MN) est $\dfrac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \dfrac{-2\ln 2}{-1} = 2\ln 2$.

c. La dérivée de f est : $f'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$; la tangente à (C_f) est parallèle à (MN) lorsque $\ln x + 1 = 2\ln 2 \Leftrightarrow x = e^{2\ln 2 - 1} = \dfrac{1}{e}\left(e^{\ln 2}\right)^2 = \dfrac{4}{e}$.

d. $y = 2\ln 2\left(x - \dfrac{4}{e}\right) + \left(1 + \dfrac{4}{e}\ln\left(\dfrac{4}{e}\right)\right) = (2\ln 2)x - 2\ln 2 \times \dfrac{4}{e} + 1 + \dfrac{4}{e}\ln 4 - \dfrac{4}{e} = (2\ln 2)x + 1 - \dfrac{4}{e}$ $(\ln 4 = 2\ln 2)$.

2. Soit g la fonction définie sur $[1\,;2]$ par $g(x) = f(x) - \left[(2\ln 2)x - \dfrac{4}{e} + 1\right]$.

a. $g'(x) = f'(x) - 2\ln 2 = 1 + \ln x - \ln 4 = 1 + \ln\left(\dfrac{x}{4}\right)$.

b. $g'(x) = 1 + \ln\left(\dfrac{x}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{x}{4}\right) \geq -1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{4} \geq e^{-1} \Leftrightarrow x \geq \dfrac{4}{e}$.

Lorsque $x = \dfrac{4}{e}$, g est nulle ; donc décroissante jusqu'à $\dfrac{4}{e}$ puis croissante, le minimum est 0 ; conclusion $g(x) \geq 0$ et (C_f) est au-dessus de (T).

3. a. Il nous faut les ordonnées de M' et N' : $y_{M'} = (2\ln 2) + 1 - \dfrac{4}{e}$, $y_{N'} = (4\ln 2) + 1 - \dfrac{4}{e}$.

Aire de $MNQP$: $\dfrac{(PM + QN)}{2} \times PQ = \dfrac{(y_M + y_n)}{2} \times 1 = 1 + \ln 2 \approx 1{,}693$;

aire de $M'N'QP$: $\dfrac{(PM' + QN')}{2} \times PQ = \dfrac{(y_{M'} + y_{N'})}{2} \times 1 = 3\ln 2 + 1 - \dfrac{4}{e} \approx 1{,}608$;

b. L'aire ***A*** est comprise entre ces deux valeurs : 1,6 à 10^{-1} près.

Partie B

1. On pose $u' = x,\ v = \ln x \Rightarrow u = \frac{1}{2}x^2,\ v' = \frac{1}{x}$ d'où

$$\int_1^2 x \ln x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x} dx = 2\ln 2 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4} \approx 0{,}636 \quad .$$

2. $\boldsymbol{A} = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 1dx + \int_1^2 x \ln x dx = 1 + 2\ln 2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + 2\ln 2 \approx 1{,}636$.