## Nouvelle Calédonie

### 1. Exercice 1

*4 points*

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

*Une réponse exacte rapporte* 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine $O$.

1. Une solution de l'équation $2z+\overline{z}=9+i$ est :

a. 3 b. $i$ c. $3+i$

2. Soit $z$ un nombre complexe ; $|z+i|$ est égal à :

a. $|z|+1$ b. $|z-1|$ c. $|i\overline{z}+1|$

3. Soit $z$ un nombre complexe non nul d'argument $\theta$. Un argument de $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\overline{z}}$ est :

a. $-\dfrac{\pi}{3}+\theta$ b. $\dfrac{2\pi}{3}+\theta$ c. $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$

4. Soit $n$ un entier naturel. Le complexe $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :

a. $n=3$ b. $n=6k+3$, avec $k$ relatif c. $n=6k$ avec $k$ relatif

5. Soient $A$ et $B$ deux points d'affixe respective $i$ et $-1$. l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ vérifiant $|z-i|=|z+1|$ est :

a. la droite $(AB)$ b. le cercle de diamètre $[AB]$ c. la droite perpendiculaire à $(AB)$ passant par $O$

6. Soit le point d'affixe $1-i$.

L'ensemble des points $M$ d'affixe $z=x+iy$ vérifiant $|z-1+i|=|3-4i|$ a pour équation :

a. $y=-x+1$ b. $(x-1)^2+y^2=\sqrt{5}$ c. $z=1-i+5ie^{i\theta}$ avec $\theta$ réel

7. Soient $A$ et $B$ les points d'affixes respectives 4 et $3i$. L'affixe du point $C$ tel que le triangle $ABC$ soit isocèle avec $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ est :

a. $1-4i$ b. $-3i$ c. $7+4i$

8. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\dfrac{z-2}{z-1}=z$ est :

a. $\{1-i\}$ b. L'ensemble vide c. $\{1-i\,;1+i\}$

### 2. Exercice 2

*5 points*

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.

La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.

On note :

– D l'évènement « le composant est défectueux » ;

– $F_1$ l'évènement « le composant provient du premier fournisseur » ;

– $F_2$ l'évènement « le composant provient du second fournisseur ».

1. a. Dessiner un arbre pondéré.

b. Calculer $p(D \cap F_1)$, puis démontrer que $p(D) = 0{,}0225$.

c. Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

*Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à* $10^{-3}$ *près.*

2. Le responsable commande 20 composants.Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?

3. La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée $X$ qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre $\lambda$, avec $\lambda$ réel strictement positif.

a. Sachant que $p(X > 5) = 0{,}325$, déterminer $\lambda$.

Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0{,}225$.

b. Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?

c. Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?

## *3. Exercice 3*

*6 points*

Partie A : question de cours

1. Soit $f$ une fonction réelle définie sur $[a\ ;\ +\infty[$. Compléter la phrase suivante :

«On dit que $f$ admet une limite finie $l$ en $+\infty$ si . . . . . . .»

2. Démontrer le théorème « des gendarmes » : soient $f$, $g$ et $h$ trois fonctions définies sur $[a\ ;\ +\infty[$ et $l$ un nombre réel.

Si $g$ et $h$ ont pour limite commune $l$ quand $x$ tend vers $+\infty$, et si pour tout $x$ assez grand $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, alors la limite de $f$ quand $x$ tend vers $+\infty$ est égale à $l$.

Partie B

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan. La droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à (C).

On a représenté ci-dessous la courbe (C) et la droite ($D$).

1. Soit $a$ un nombre réel. Écrire, en fonction de $a$, une équation de la tangente (T) à (C) au point $M$ d'abscisse $a$.

2. Cette tangente (T) coupe la droite (D) au point $N$ d'abscisse $b$. Vérifier que $b - a = -1$.

3. En déduire une construction, à effectuer sur la figure ci-dessous, de la tangente (T) à (C) au point $M$ d'abscisse 1,5. On fera apparaître le point $N$ correspondant.

Partie C

1. Déterminer graphiquement le signe de $f$.

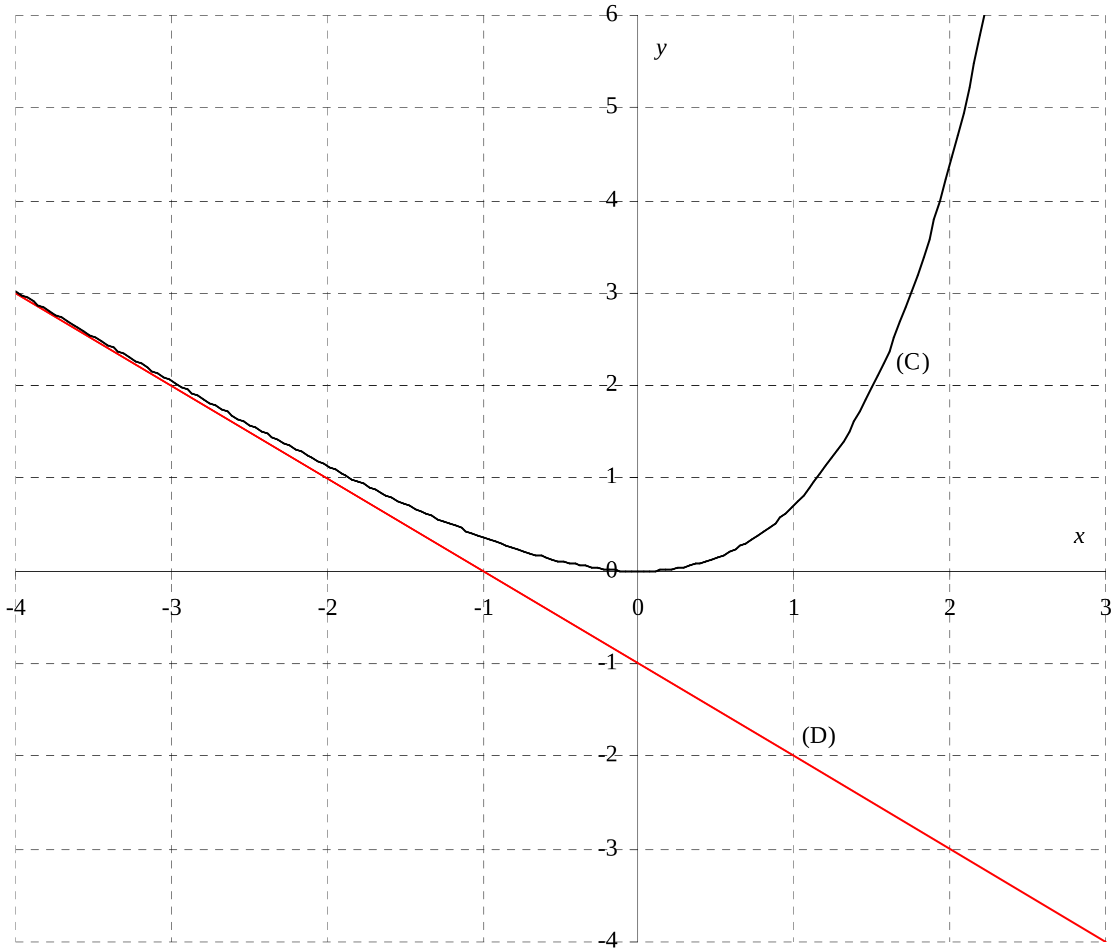
2. En déduire, pour tout entier naturel non nul $n$, les inégalités suivantes :

$$(1)\ e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n} \text{ et } (2)\ e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1}.$$

3. En utilisant l'inégalité (1), démontrer que pour tout entier naturel non nul $n$ : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$.

4. En utilisant l'inégalité (2), démontrer que pour tout entier naturel non nul $n$ : $e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

5. Déduire des questions précédentes un encadrement de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ puis sa limite en $+\infty$.




## 4. Exercice 4 (non spécialistes)

*5 points*

Soit $OABC$ un tétraèdre trirectangle (les triangles $OAB$, $OBC$, $OCA$ sont rectangles en $O$). On note $H$ le projeté orthogonal de $O$ sur le plan ($ABC$).

Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de ce tétraèdre.

1. a. Pourquoi la droite ($OH$) est-elle orthogonale à la droite ($BC$) ? Pourquoi la droite ($OA$) est-elle orthogonale à la droite ($BC$) ?

b. Démontrer que les droites ($AH$) et ($BC$) sont orthogonales. On peut démontrer de façon analogue que les droites ($BH$) et ($AC$) sont orthogonales. Ce résultat est ici admis.

c. Que représente le point $H$ pour le triangle $ABC$ ?

2. L'espace est maintenant muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;2\,;0)$ et $C(0\,;0\,;3)$.

a. Déterminer une équation cartésienne du plan ($ABC$).

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par $O$ et orthogonale au plan ($ABC$).

c. Démontrer que le plan ($ABC$) et la droite (d) se coupent en un point $H$ de coordonnées $\left(\frac{36}{49}\,;\frac{18}{49}\,;\frac{12}{49}\right)$.

3. a. Calculer la distance du point $O$ au plan ($ABC$).

b. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$. En déduire l'aire du triangle $ABC$.

c. Vérifier que le carré de l'aire du triangle $ABC$ est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre.

## *5. Exercice 4 (spécialistes)*

*5 points*

1. a. Quel est le reste de la division euclidienne de 610 par 11 ? Justifier.

b. Quel est le reste de la division euclidienne de 64 par 5 ? Justifier.

c. En déduire que $640 \equiv 1[11]$ et que $640 \equiv 1[5]$.

d. Démontrer que 640 − 1 est divisible par 55.

2. Dans cette question $x$ et $y$ désignent des entiers relatifs.

a. Montrer que l'équation ($E$) $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.

b. Montrer que l'équation ($E'$) $17x - 40y = 1$ admet aumoins une solution.

c. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation ($E'$).

d. Résoudre l'équation ($E'$).

En déduire qu'il existe un unique naturel $x_0$ inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1[40]$.

3. Pour tout entier naturel $a$, démontrer que si $a^{17} \equiv b[55]$ et si $a^{40} \equiv 1[55]$, alors $b^{33} \equiv a[55]$.