Amérique du Sud

1. Exercice 1

4 points

1. Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.

On suppose connu le résultat suivant : La fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$.

Soit a un réel donné.

a. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.

b. Soit g une solution de l'équation $y' = ay$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)e^{-ax}$.

Montrer que h est une fonction constante.

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$.

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$.

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_0(x) = a\cos x + b\sin x$ soit une solution f_0 de (E).

b. Résoudre l'équation différentielle (E$_0$) : $y' = 2y$.

c. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E$_0$).

d. En déduire les solutions de (E).

e. Determiner la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Correction

a. $f'(x) = ae^{ax} = af(x)$ donc $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.

b. $h'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = ag(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = 0 \Rightarrow h(x) = K$.

c. $h(x) = K = g(x)e^{-ax} \Rightarrow g(x) = Ke^{ax}$.

2. $f_0(x) = a\cos x + b\sin x$ est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$ si

a. $f_0'(x) = 2f_0(x) + \cos x \Leftrightarrow -a\sin x + b\cos x = 2(a\cos x + b\sin x) + \cos x \Rightarrow \begin{cases} -a = 2b \\ b = 2a + 1 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{1}{5},\ a = -\frac{2}{5}$.

b. $y' = 2y$ a pour solutions $y = Ke^{2x}$.

c. f est solution de (E) si et seulement si $\begin{cases} f' = 2f + \cos x \\ f_0' = 2f_0 + \cos x \end{cases} \Leftrightarrow f' - f_0' = 2(f - f_0)$, soit $f - f_0$ solution de (E$_0$).

d. Les solutions de (E) sont données par $f - f_0 = Ke^{2x} \Leftrightarrow f(x) = \left(-\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x\right) + Ke^{2x}$.

e. $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{2}{5}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{\pi}{2}\right) + Ke^{2\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5} + Ke^{\pi} = 0 \Leftrightarrow K = -\frac{1}{5}e^{-\pi}$.

2. Exercice 2 (spécialistes)

5 points

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. On considère les points A d'affixe 1 et B d'affixe i. On appelle S la réflexion (symétrie axiale) d'axe (AB).

Montrer que l'image M' par S d'un point M d'affixe z a pour affixe $z' = -iz + 1 + i$.

2. On note H l'homothétie de centre A et de rapport −2. Donner l'écriture complexe de H.

3. On note f la composée $H \circ S$.

a. Montrer que f est une similitude.

b. Déterminer l'écriture complexe de f.

4. On appelle M'' l'image d'un point M par f.

a. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM''} = -2\overrightarrow{AM}$ est la droite (AB).

b. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM''} = 2\overrightarrow{AM}$ est la perpendiculaire en A à la droite (AB).

3. Exercice 2 (non spécialistes)

5 points

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.
Soit f l'application qui à tout point M de P d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe :
$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

1. Soit E le point d'affixe $z_E = -i$. Déterminer l'affixe du point E' image de E par f.
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.
3. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et −1. Soit M un point distinct des points O, A et B.

a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et −1, on a : $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$.

b. En déduire une expression de $\frac{M'B}{M'A}$ en fonction de $\frac{MB}{MA}$ puis une expression de l'angle $\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right)$ en fonction de l'angle $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$.

4. Soit Δ la médiatrice du segment $[AB]$. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O, alors M' est un point de Δ.
5. Soit Γ le cercle de diamètre $[AB]$.
a. Montrer que si le point M appartient à Γ alors le point M' appartient à la droite (AB).
b. Tout point de la droite (AB) a-t-il un antécédent par f ?

Correction

$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

1. $z'_E = \frac{1}{2}\left(-i + \frac{1}{-i}\right) = 0$.

2. $z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow 2z^2 = z^2 + 1 \Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \pm 1$.

3. a. $\dfrac{z'+1}{z'-1}=\dfrac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+1}{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-1}=\dfrac{z^2+1+2z}{z^2+1-2z}=\dfrac{(z+1)^2}{(z-1)^2}=\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$.

b. $\dfrac{M'B}{M'A}=\dfrac{|1-z'|}{|-1-z'|}=\left|\dfrac{z'-1}{z'+1}\right|=\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right|^2=\left(\dfrac{MB}{MA}\right)^2$.

$\left(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}\right)=\arg\left(\dfrac{z'+1}{z'-1}\right)=2\arg\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)=2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$.

4. M est un point de Δ : $MA=MB\Rightarrow\dfrac{M'B}{M'A}=1^2=1\Leftrightarrow M'B=M'A$; M' est un point de Δ.

5. a. M appartient à Γ : $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\pm\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\left(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}\right)=\pm2\dfrac{\pi}{2}=\pm\pi$ donc M' appartient à (AB).

b. Si M' a pour affixe Z, où est M ? $Z=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\Leftrightarrow z^2-2Zz+1=0$ qui a toujours une ou deux solutions. Tous les points ont des antécédents par f, qu'ils soient sur $[AB]$ ou non.

4. Exercice 3

5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. On considère le point A de coordonnées $(-2 ; 8 ; 4)$ et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1 ; 5 ; -1)$.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives $x-y-z=7$ et $x-2z=11$.

Démontrer que les plans (P) et (Q) sont sécants. On donnera une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée (d').

Montrer que le vecteur de coordonnées $(2 ; 1 ; 1)$ est un vecteur directeur de (d').

3. Démontrer que les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.

4. On considère le point H de coordonnées $(-3 ; 3 ; 5)$ et le point H' de coordonnées $(3 ; 0 ; -4)$.

a. Vérifier que H appartient à (d) et que H' appartient à (d').

b. Démontrer que la droite (HH')est perpendiculaire aux droites (d) et (d').

c. Calculer la distance entre les droites (d) et (d'), c'est-à-dire la distance HH'.

5. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MH'}\cdot\overrightarrow{HH'}=126$.

5. Exercice 4

6 points

1. On considère la fonction f_1 définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_1(x)=2x-2+\ln\left(x^2+1\right)$.

a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

b. Déterminer la dérivée de f_1.

c. Dresser le tableau de variations de f_1.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n, définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f_n(x)=2x-2+\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{n}.$$

a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

b. Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

c. Démontrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution α_n sur $[0 ; +\infty[$.

d. Justifier que, pour tout entier naturel n, $0 < \alpha_n < 1$.

3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$.

4. Étude de la suite (α_n)

a. Montrer que la suite (α_n) est croissante.

b. En déduire qu'elle est convergente.

c. Utiliser l'expression $\alpha_n = 1 - \dfrac{\ln\left(\alpha_n^2 + 1\right)}{2n}$ pour déterminer la limite de cette suite.