Polynésie

1. Exercice 1

7 points

On désigne par (E) l'ensemble des fonctions *f* continues sur l'intervalle $[0\,;1]$ et vérifiant les conditions P_1, P_2 et P_3 suivantes :

P_1 : *f* est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$.

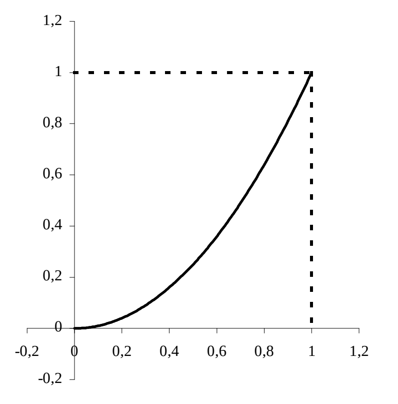
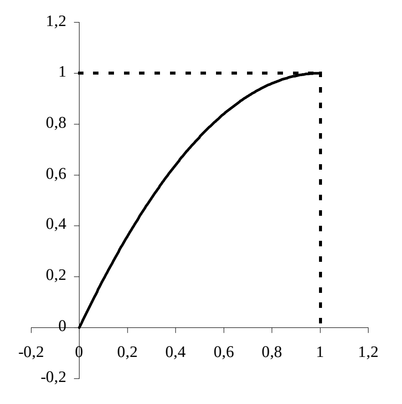
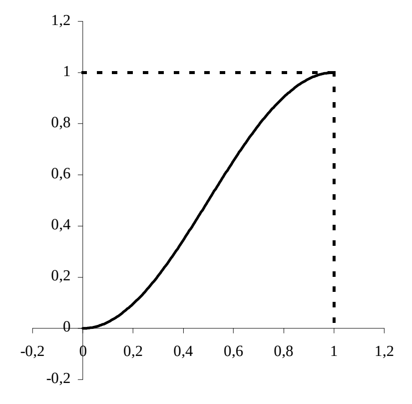
P_2 : $f(0)=0$ et $f(1)=1$.

P_3 : Pour tout réel *x* de l'intervalle $[0\,;1]$, $f(x)\le x$.

Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan, on note (C) la courbe représentative d'une fonction *f* de l'ensemble (E) et (D) la droite d'équation $y=x$.

A toute fonction *f* de (E) on associe le nombre réel $I_f=\int_0^1\left[x-f(x)\right]dx$.

1. a. Une seule des trois courbes ci-dessous représente une fonction de (E). La déterminer en justifiant l'élimination des deux autres.

		
Courbe n°1	Courbe n°2	Courbe n°3

b. Montrer que, pour toute fonction *f* de (E), $I_f\ge 0$.

2. Soit *h* la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $h(x)=2^x-1$ (on rappelle que pour tout réel *x*, $2^x=e^{x\ln 2}$).

a. Montrer que la fonction *h* vérifie les conditions P_1 et P_2.

b. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $\varphi(x)=2^x-x-1$.

Montrer que, pour tout x de $[0\,;1]$, $\varphi(x)\le 0$ (on pourra étudier les variations de φ sur $[0\,;1]$). En déduire que la fonction h appartient à l'ensemble (E).

c. Montrer que le réel I_h associé à la fonction h est égal à $\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln 2}$.

3. Soit *P* une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $P(x)=ax^2+bx+c$ où *a*, *b* et *c* sont trois nombres réels avec $0<a<1$. On se propose de déterminer les valeurs des réels *a*, *b* et *c* pour que la fonction *P* appartienne à l'ensemble (E) et que $I_P=I_h$.

a. Montrer que la fonction P vérifie la propriété P_2 si et seulement si, pour tout réel de l'intervalle $[0\,;1]$, $P(x) = ax^2 + (1-a)x$.

Montrer que toute fonction P définie sur $[0\,;1]$ par $P(x) = ax^2 + (1-a)x$ avec $0 < a < 1$ appartient à (E).

b. Exprimer en fonction de a le réel I_P associé à la fonction P.

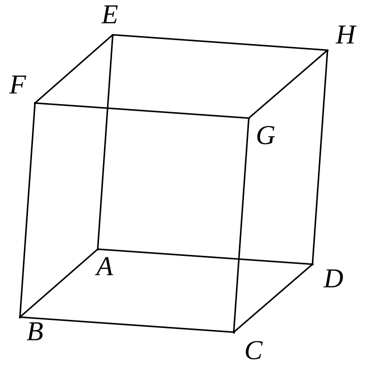
c. Montrer qu'il existe une valeur du réel a pour laquelle $I_P = I_h$. Quelle est cette valeur ?

2. Exercice 2

4 points

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 3.

On choisit le repère orthonormal $(D\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$, $\vec{j} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$, $\vec{k} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$.



1. a. Donner les coordonnées des points A, C, E.

b. Déterminer les coordonnées du point L barycentre du système $\{(C, 2)\,; (E, 1)\}$.

c. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$.

2. Soit (a, b) un couple de réels. On note M le point de la droite (AE) tel que $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AE}$ et N le point de la droite (DL) tel que $\overrightarrow{DN} = b\overrightarrow{DL}$.

a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$ si et seulement si le couple (a, b) vérifie le système $\begin{cases} -a+2b=1 \\ 3a-b=0 \end{cases}$.

b. En déduire qu'il existe un seul point M_0 de (AE) et un seul point N_0 de (DL) tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL).

c. Déterminer les coordonnées des points M_0 et N_0 puis calculer la distance M_0N_0.

3. Exercice 3

4 points

La végétation d'un pays imaginaire est composée initialement de trois types de plantes : 40 % de type A, 41 % de type B et 19 % de type C.

On admet qu'au début de chaque année :

- chaque plante de type A disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.

- chaque plante de type B disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.

- chaque plante de type C disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type C.

La probabilité qu'une plante de type A soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type B est 0,3.

La probabilité qu'une plante de type B soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type A est 0,3.

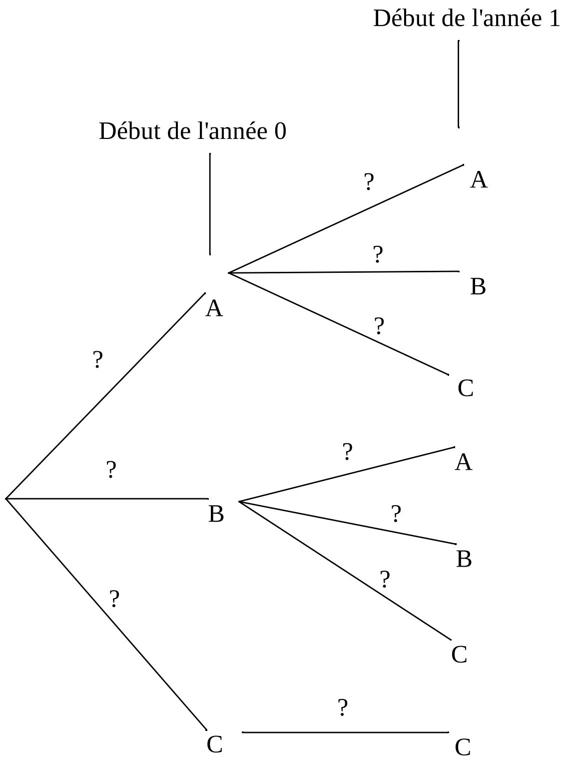
Au début de chaque année, on choisit au hasard une plante dans la végétation et on relève son type.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- A_n l'événement « la plante choisie la n-ième année est de type A »,
- B_n l'événement « la plante choisie la n-ième année est de type B »,
- C_n l'événement « la plante choisie la n-ième année est de type C ».

On désigne par p_n, q_n et r_n les probabilités respectives des vénements A_n, B_n et C_n. Compte tenu de la composition initiale de la végétation (année 0), on pose $p_0 = 0,40$, $q_0 = 0,41$ et $r_0 = 0,19$.

1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-contre, en remplaçant chaque point d'interro-gation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



2. a. Montrer que $p_1 = 0,363$ puis calculer q_1 et r_1.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $\begin{cases} p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3q_n \\ q_{n+1} = 0,3p_n + 0,6q_n \end{cases}$.

3. On définit les suites (S_n) et (D_n) sur $\mathbb{N}$ par :

$$S_n = p_n + q_n \text{ et } D_n = p_n - q_n.$$

a. Montrer que (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. On admet que (D_n) est une suite géométrique de raison 0,3.

b. Déterminer les limites des suites (S_n) et (D_n).

c. En déduire les limites des suites (p_n), (q_n) et (r_n).

Interpréter le résultat.

4. Exercice 4 (spécialistes)

5 points

Pour cet exercice, les figures correspondant aux parties A et B sont fournies ci-dessous.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On considère un triangle OAB et une similitude directe σ de centre O, de rapport λ et d'angle θ.

Soit :

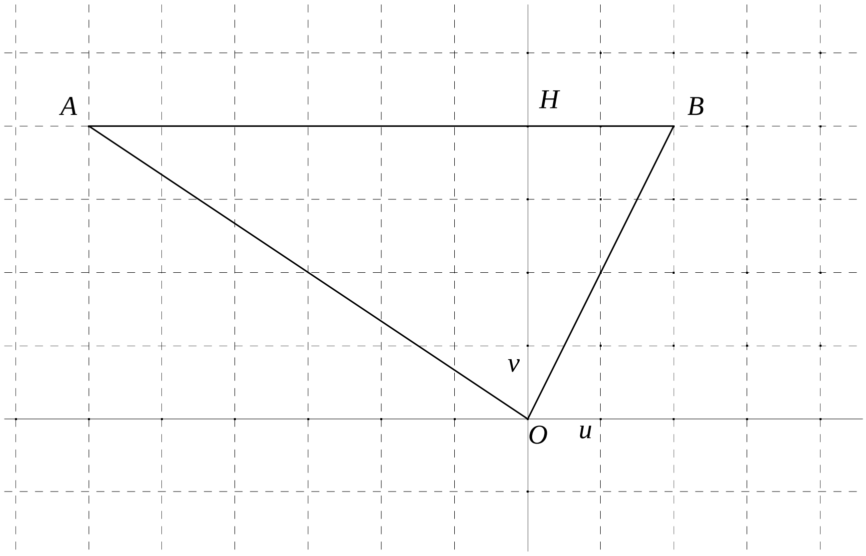
- les points A' et B' images respectives des points A et B par la similitude σ ;
- les points I, milieu du segment $[A'B]$ et J, milieu du segment $[AB']$;
- le point M milieu du segment $[AA']$;
- le point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AB) et le point H' image du point H par σ.

Partie A : Etude d'un exemple

Dans cette partie, le point A a pour affixe $-6+4i$, le point B a pour affixe $2+4i$, et le point H a donc pour affixe $4i$.

La similitude σ est la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer les affixes des points A', B' et H'.
2. Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH').



Partie B : Etude du cas général

1. a. Montrer que H' est le projeté orthogonal du point O sur la droite $(A'B')$.

b. Montrer que $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. On admet que $\overrightarrow{MJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}$.

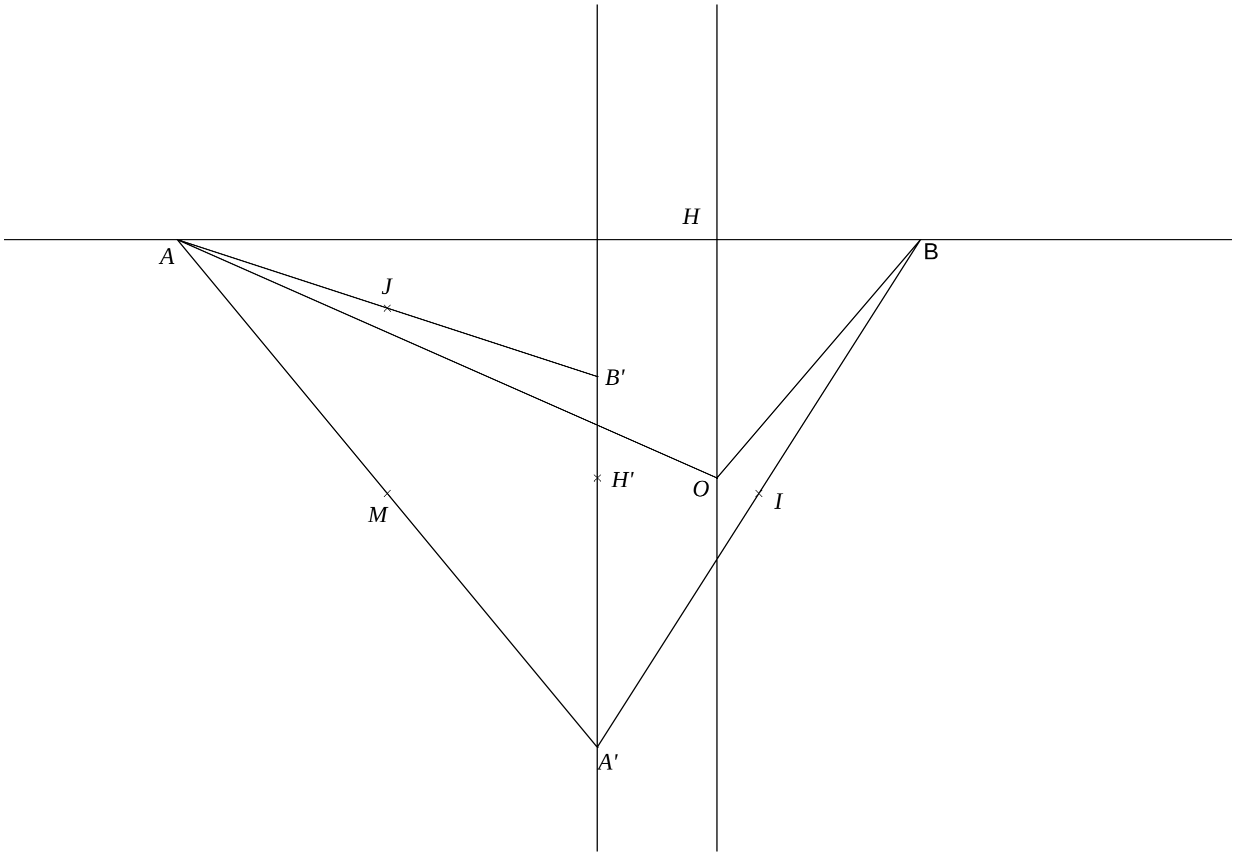
c. En déduire que $\frac{MJ}{MI}=\frac{OH'}{OH}$ et que $\left(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MJ}\right)=\left(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OH'}\right)+k\times 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

2. On appelle s la similitude directe qui transforme M en O et I en H. On note K l'image du point J par la similitude s.

a. Montrer que $OK=OH'$, puis que $\left(\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OH'}\right)=0+k\times 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

b. En déduire que le point H' est l'image du point J par la similitude s.

3. Montrer que $\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{HH'}\right)=\left(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{OH}\right)+k\times 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH').


H
A
B
J
B'
H'
O
I
M
A'