# Pondicherry

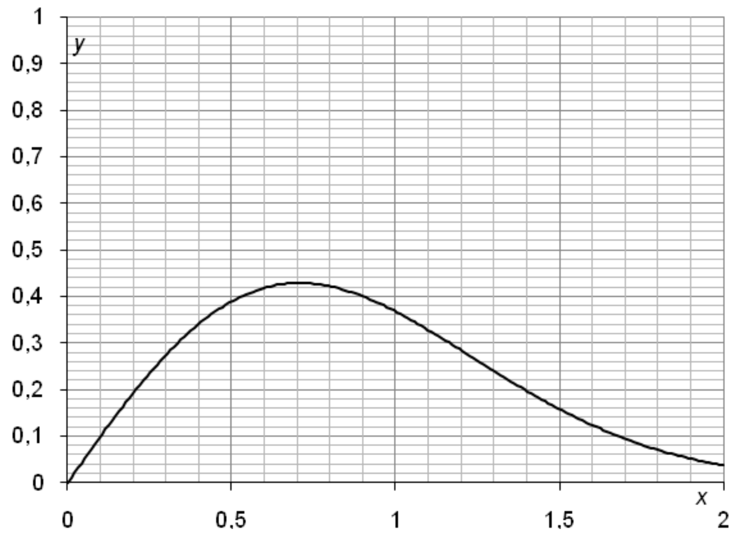
## 1. Exercice 1

*7 points*

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=xe^{-x^2}.$$

On désigne par C la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan. Cette courbe est représentée ci-contre.




**Partie A**

1. a. Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$. On pourra écrire, pour $x$ différent de 0,

$$f(x)=\frac{1}{x}\times\frac{x^2}{e^{x^2}}.$$

b. Démontrer que $f$ admet un maximum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

2. Soit $a$ un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de $a$, l'aire $F(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x$ = 0 et $x$ = $a$.

Quelle est la limite de $F(a)$ quand $a$ tend vers $+\infty$ ?

**Partie B**

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $u_n=\int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

On ne cherchera pas à expliciter $u_n$.

1. a. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ différent de 0 et de 1 : $f(n+1)\leq u_n\leq f(n)$.

b. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)$, $n > 2$ ?

c. Montrer que la suite $(u_n)$ converge. Quelle est sa limite ?

2. a. Vérifier que, pour tout entier naturel strictement positif $n$, $F(n)=\sum_{k=0}^{n-1}u_k$.

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On donne ci-dessous les valeurs de $F(n)$ obtenues à l'aide d'un tableur, pour $n$ entier compris entre 3 et 7.

| $n$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $F(n)$ | 0,499 938 295 1 | 0,499 999 943 7 | 0,5 | 0,5 | 0,5 |

Interpréter ces résultats.

**Correction**

**Partie A**

1. a. $f(x)=xe^{-x^2}=\frac{x^2}{x}\times\frac{1}{e^{x^2}}=\frac{1}{x}\times\frac{x^2}{e^{x^2}}$, or $\frac{1}{x}$ tend vers 0 et $\frac{e^X}{X}$ tend vers $+\infty$ donc $\frac{x^2}{e^{x^2}}$ tend vers 0. f tend vers 0.

b. $f'(x)=e^{-x^2}+x(-2x)e^{-x^2}=(1-2x^2)e^{-x^2}$ ; $1-2x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2\leq\frac{1}{2}\Rightarrow x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($x$ est > 0, seule la racine positive nous intéresse). $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2e}}$.

2. $F(a)=\int_0^a xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^a(-2x)e^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^a=-\frac{1}{2}e^{-a^2}+\frac{1}{2}$. $F$ tend vers $\frac{1}{2}$ en $+\infty$.

**Partie B**

1. a. La fonction *f* est décroissante pour $x$ > 1, on a donc $n\leq x\leq n+1\Rightarrow f(n+1)\leq f(x)\leq f(n)$. On a donc en intégrant : $\int_n^{n+1}f(n+1)dx\leq\int_n^{n+1}f(x)dx\leq\int_n^{n+1}f(n)dx\Leftrightarrow(n+1-n)f(n+1)\leq u_n\leq(n+1-n)f(n)$.

b. On a $f(n+1)\leq u_n\leq f(n)$, soit $f(n+2)\leq u_{n+1}\leq f(n+1)\leq u_n$ : $u_n$ est décroissante.

c. Evidemment tous les termes de la suite sont positifs (intégrale d'une fonction positive) donc $u_n$ est décroissante, minorée par 0, elle converge. Sa limite est comprise entre les limites de $f(n)$ et $f(n+1)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, soit 0.

2. a. $\sum_{k=0}^{n-1}u_k=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+\ldots+\int_{n-1}^n f(x)dx=\int_0^n f(x)dx=F(n)$.

b. $F(3)$ est une valeur approchée à $10^{-4}$ près de la limite $F(x)$, soit de l'aire comprise entre la courbe et l'axe horizontal.

## *2. Exercice 2 (non spécialistes)*

*5 points*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

Soit $A$, $B$ et $C$ les points d'affixes respectives : $a = 3 - i$, $b = 1 - 3i$ et $c = -1 - i$.

1. a. Placer ces points sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

b. Quelle est la nature du triangle $ABC$ ?

c. Démontrer que les points $A$ et $B$ appartiennent à un même cercle $\Gamma$ de centre $O$, dont on calculera le rayon.

2. Soit $M$ un point quelconque du plan d'affixe notée $m$ et $N$ le point d'affixe notée $n$, image de $A$ dans la rotation $r$ de centre $M$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

a. Donner l'écriture complexe de la rotation $r$.

b. En déduire une expression de $n$ en fonction de $m$.

3. On appelle $Q$ le milieu du segment $[AN]$ et $q$ son affixe. Montrer que $q=\frac{(1-i)m}{2}+2+i$.

4. Dans cette question, $M$ est un point du cercle $\Gamma$.

a. Justifier l'existence d'un réel $\theta$ tel que : $m=\sqrt{10}\,e^{i\theta}$.

b. Calculer $|q-2-i|$. Quel est le lieu $\Gamma'$ de $Q$ lorsque $M$ décrit le cercle $\Gamma$ ?

**Correction**

1. a. Voir plus bas.

b. Le triangle $ABC$ est rectangle isocèle :

$AB = |1-3i-3+i| = |-2-2i| = 2\sqrt{2}$ , $CB = |1-3i+1+i| = |2-2i| = 2\sqrt{2}$ , $CA = 4$ , $AB^2 + CB^2 = CA^2$ .

c. $OA = |3-i| = \sqrt{10}$ , $OB = |1-3i| = \sqrt{10}$ .

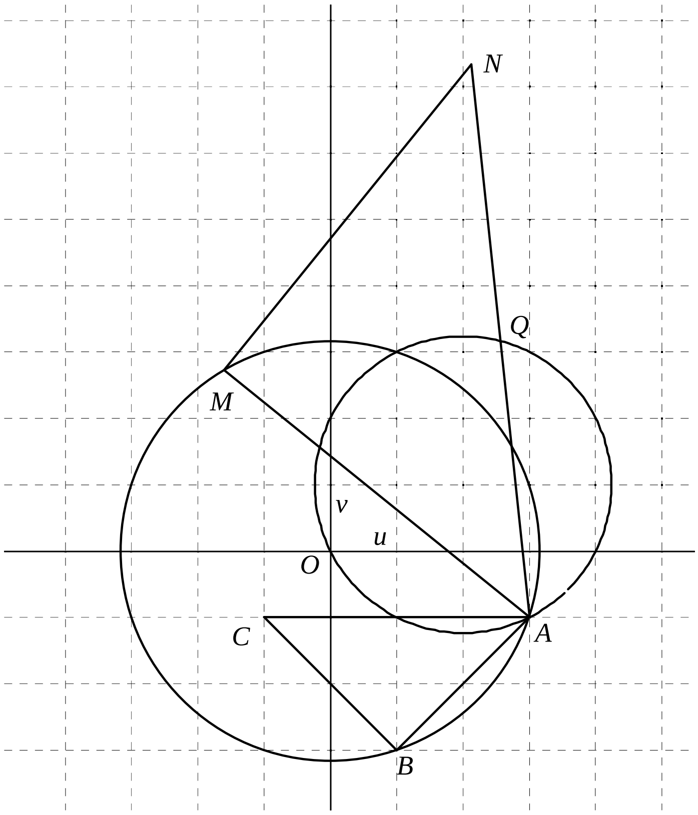
2. a. Ecriture complexe de la rotation $r$ : $z'-m = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-m) \Leftrightarrow z' = iz + m(1-i)$.

b. $n = iz_A + m(1-i) = 3i+1+m(1-i)$.

3. $q = \dfrac{z_A+n}{2} = \dfrac{3-i+3i+1+m(1-i)}{2} = \dfrac{4+2i+m(1-i)}{2} = \dfrac{m(1-i)}{2}+2+i$ .

4. a. $\theta$ l'argument de $m$. $M$ est un point du cercle $\Gamma$ donc $|m| = \sqrt{10} \Rightarrow m = \sqrt{10}\, e^{i\arg(m)} = \sqrt{10}\, e^{i\theta}$ .

b. $|q-2-i| = \dfrac{|1-i||m|}{2} = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{10}}{2} = \sqrt{5}$ . Lorsque $M$ décrit le cercle $\Gamma$, $Q$ décrit le cercle de centre $2+i$, de rayon $\sqrt{5}$ .




***3. Exercice 2 (spécialistes)***

*5 points*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

Soit $A$ et $B$ les points d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = 1+2i$ .

1. Justifier qu'il existe une unique similitude directe $S$ telle que : $S(O) = A$ et $S(A) = B$.

2. Montrer que l'écriture complexe de $S$ est : $z' = (1-i)z + i$ .

Préciser les éléments caractéristiques de $S$ (on notera $\Omega$ le centre de $S$).

On considère la suite de points ($A_n$) telle que :

• $A_0$ est l'origine du repère et,

• pour tout entier naturel $n$, $A_{n+1} = S(A_n)$.

On note $z_n$, l'affixe de $A_n$. (On a donc $A_0 = O$, $A_1 = A$ et $A_2 = B$).

3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $z_n = 1-(1-i)^n$.

b. Déterminer, en fonction de $n$, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$.

Comparer les normes de ces vecteurs et calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_n A_{n+1}}\right)$.

c. En déduire une construction du point $A_{n+1}$ connaissant le point $A_n$. Construire les points $A_3$ et $A_4$.

4. Quels sont les points de la suite $(A_n)$ appartenant à la droite $(\Omega B)$ ?

**Correction**

1. et 2. $O$, $A$, $B$ sont trois points distincts donc il existe une unique similitude directe $S$ telle que : $S(O) = A$ et $S(A) = B$.

$$z' = az + b \Rightarrow \begin{cases} i = a.0 + b \\ 1 + 2i = a.i + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = i \\ ai = 1 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = i \\ a = \dfrac{1+i}{i} = \dfrac{(1+i)(-i)}{1} = 1 - i \end{cases}.$$

$z = (1-i)z + i \Leftrightarrow iz = i \Leftrightarrow z = 1$ : $\Omega$ a pour affixe 1 ; $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

3. a. $A_{n+1} = S(A_n)$ : par récurrence, $z_0 = 1-(1-i)^0 = 1-1 = 0$, ok.

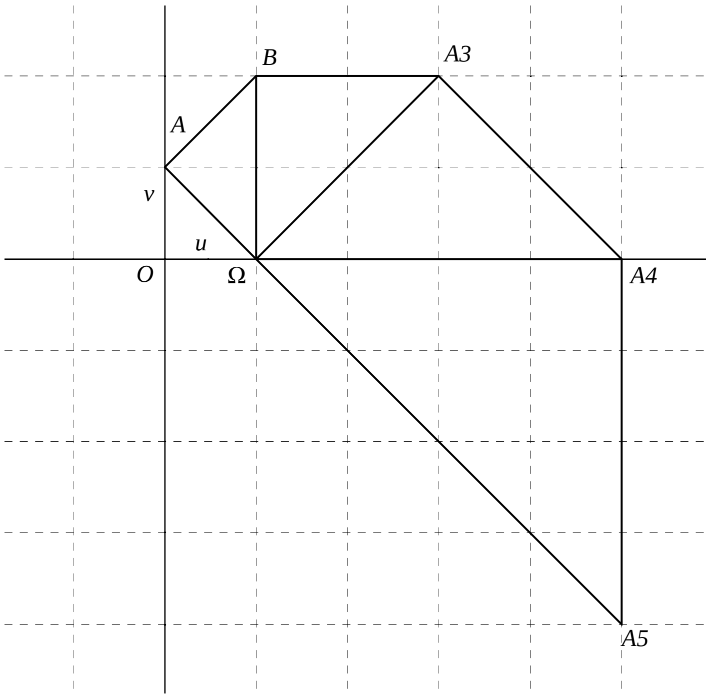
$z_{n+1} = (1-i)z_n + i = (1-i)\left[1-(1-i)^n\right] + i = 1 - i - (1-i)^{n+1} + i = 1-(1-i)^{n+1}$. ok.

b. $z_{\overline{\Omega A_n}} = z_n - 1 = -(1-i)^n$, $\left|z_{\overline{\Omega A_n}}\right| = \left|-(1-i)^n\right| = \left(\sqrt{2}\right)^n$ ;

$z_{\overline{A_n A_{n+1}}} = z_{n+1} - z_n = 1-(1-i)^{n+1} - 1 + (1-i)^n = (1-i)^n\left[1-(1-i)\right] = i(1-i)^n$ ;

$\left|z_{\overline{A_n A_{n+1}}}\right| = \left|i(1-i)^n\right| = 1 \times \left(\sqrt{2}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n$.

c. Le triangle $OA_nA_{n+1}$ est rectangle isocèle en $O$.




On tourne de $-\dfrac{\pi}{4}$ autour de $\Omega$ et on multiplie par $\sqrt{2}$ : il suffit de prendre la diagonale du carré de côté $\Omega A_n$ pour avoir $A_{n+1}$.

4. Il faut faire 4 rotations successives pour se retrouver sur $(\Omega B)$. On aura donc tous les points $A_{4k+2}$.

## 4. Exercice 3

*4 points*

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points : $A$ de coordonnées (1, 1, 0), $B$ de coordonnées (2, 0, 3), $C$ de coordonnées (0, −2, 5) et $D$ de coordonnées (1, −5, 5).

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou par FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :

**Proposition 1** : L'ensemble des points $M$ de coordonnées $(x, y, z)$ tels que $y = 2x + 4$ est une droite.

**Proposition 2** : La transformation qui, à tout point $M$ de l'espace associe le point $M'$ tel que

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$$

est l'homothétie de centre $G$, où $G$ désigne le barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1), (C, 2)\}$, et de rapport 3.

**Proposition 3** : $A$, $B$, $C$ et $D$ sont quatre points coplanaires.

**Proposition 4** : La sphère de centre $\Omega$ de coordonnées (3, 3, 0) et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2x + 2y + z + 3 = 0$.

**<u>Correction</u>**

Proposition 1 : FAUX : c'est l'équation d'un plan !

Proposition 2 : FAUX : le rapport est −3.

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = 4\overrightarrow{MG} + \underbrace{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC}}_{\vec{0}} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = -4\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GM} = -3\overrightarrow{GM}.$$

Proposition 3 : FAUX : cherchons le plan passant par $ABC$ :

$$\begin{cases} a+b+d=0 \\ 2a+3c+d=0 \\ -2b+5c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=-a-b \\ a-b+3c=0 \\ -a-3b+5c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=-a-b \\ a=b-3c \\ -4b+8c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=-a-b \\ a=b-3c \\ b=2c \end{cases}.$$

Prenons par exemple $c$=1, on a $b$=2, $a$=–1, $d$=–1, soit le plan $-x+2y+z-1=0$ auquel $D$ n'appartient pas

Proposition 4 : VRAI : La distance de $\Omega$ au plan est : $d=\dfrac{|2\times 3+2\times 3+0+3|}{\sqrt{4+4+1}}=5$, soit le rayon de la sphère.

## *5. Exercice 4*

*4 points*

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\dfrac{1}{3}$.

*Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.*

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par $X$ la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire $X$ ?

b. Quelle est son espérance ?

c. Calculer $p(X = 2)$.

2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. On lance le dé choisi trois fois de suite.

On considère les évènements $D$ et $A$ suivants :

- $D$ « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
- $A$ : « obtenir exactement deux 6 ».

a. Calculer la probabilité des évènements suivants :

- « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
- « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».

(On pourra construire un arbre de probabilité).

b. En déduire que : $p(A)=\dfrac{7}{48}$.

c. Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé $n$ fois de suite ($n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).

On note $B_n$ l'évènement « obtenir au moins un 6 parmi ces $n$ lancers successifs ».

a. Déterminer, en fonction de $n$, la probabilité $p_n$ de l'évènement $B_n$.

b. Calculer la limite de la suite $(p_n)$. Commenter ce résultat.

**<u>Correction</u>**

1. a. La variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ = 3, $p$ = 1/6.

b. Son espérance est $np$ = 1/2.

c. $p(X=2)=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}p^2(1-p)^1=3\times\dfrac{1}{6^2}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{72}$.

2. a. • « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » :

on a 1 chance sur 2 d'avoir le dé bien équilibré, puis 5/72 d'avoir 2 six :

$$p(A\cap D)=p(D)\times p_D(A)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{72}=\frac{5}{144}.$$

• « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 » :

même démarche sauf que dans la loi binomiale $p'=1/3$ : $p(X'=2)=\binom{3}{2}p'^2(1-p')^1=3\times\frac{1}{3^2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$,

soit $p(A\cap\bar{D})=p(\bar{D})\times p_{\bar{D}}(A)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$.

b. $p(A)=p(A\cap D)+p(A\cap\bar{D})=\frac{5}{144}+\frac{1}{9}=\frac{5+16}{144}=\frac{21}{144}=\frac{7}{48}$.

c. La probabilité d'avoir choisi le dé truqué sachant qu'on a obtenu exactement deux 6 est

$$p_A(\bar{D})=\frac{p(A\cap\bar{D})}{p(A)}=\frac{1/9}{7/48}=\frac{1}{9}\times\frac{48}{7}=\frac{16}{21}.$$

3. a. Considérons l'événement contraire $\overline{B_n}$ : « n'obtenir aucun 6 parmi ces $n$ lancers successifs » et l'événement $U$ : « ne pas obtenir de 6 ». On a aucun 6 pendant $n$ lancers avec le 1er dé (probabilité à chaque lancer = 5/6), aucun 6 pendant $n$ lancers avec le 2ème dé (probabilité à chaque lancer = 2/3) :

$$p(\overline{B_n})=p(D)\times[p_D(U)]^n+p(\bar{D})\times[p_{\bar{D}}(U)]^n=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

soit $p(B_n)=1-\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ qui tend vers 1 : on est sûr de tirer au moins un 6 en lançant suffisamment longtemps… Quelle surprise !