

Asie

1. Exercice 1

5 points

Une entreprise fait fabriquer des paires de chaussettes auprès de trois fournisseurs F_1 , F_2 , F_3 .

Dans l'entreprise, toutes ces paires de chaussettes sont regroupées dans un stock unique.

La moitié des paires de chaussettes est fabriquée par le fournisseur F_1 , le tiers par le fournisseur F_2 et le reste par le fournisseur F_3 .

Une étude statistique a montré que

- 5% des paires de chaussette fabriquées par le fournisseur F_1 ont un défaut ;
- 1,5 % des paires de chaussette fabriquées par le fournisseur F_2 ont un défaut ;
- sur l'ensemble du stock, 3,5 % des paires de chaussette ont un défaut.

1. On prélève au hasard une paire de chaussettes dans le stock de l'entreprise. On considère les événements F_1 , F_2 , F_3 et D suivants :

- F_1 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur F_1 » ;
- F_2 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur F_2 » ;
- F_3 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur F_3 » ;
- D : « La paire de chaussettes prélevée présente un défaut ».

a. Traduire en termes de probabilités les données de l'énoncé en utilisant les événements précédents.

Dans la suite, on pourra utiliser un arbre pondéré associé à cet expérience.

b. Calculer la probabilité qu'une paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur F_1 et présente un défaut.

c. Calculer la probabilité de l'évènement $F_2 \cap D$.

d. En déduire la probabilité de l'évènement $F_3 \cap D$.

e. Sachant que la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur F_3 , quelle est la probabilité qu'elle présente un défaut ?

2. L'entreprise conditionne les paires de chaussettes par lots de six paires. On considère que le stock est suffisamment grand pour assimiler le choix des six paires de chaussettes à des tirages indépendants, successifs avec remise.

a. Calculer la probabilité que deux paires de chaussettes exactement d'un lot présentent un défaut ; on donnera un résultat arrondi au millième.

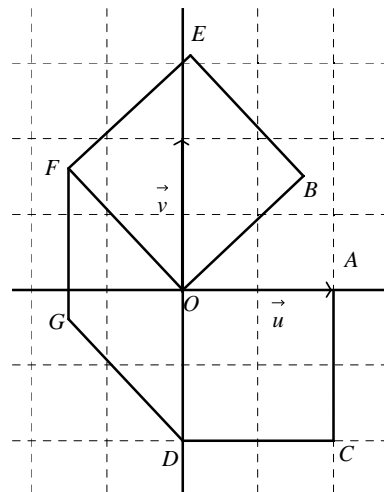
b. Démontrer que la probabilité, arrondie au millième, qu'au plus une paire de chaussettes d'un lot présente un défaut est égale à 0,983.

2. Exercice 2 (non spécialistes)

5 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On place, dans ce repère, les points A d'affixe 1, B d'affixe b où b est un nombre complexe dont la partie imaginaire est strictement positive.

On construit à l'extérieur du triangle OAB , les carrés directs $ODCA$ et $OBEF$ comme indiqué sur la figure ci-contre.



1. Déterminer les affixes c et d des points C et D .

2. On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Déterminer l'écriture complexe de r .

b. En déduire que l'affixe f du point F est ib .

c. Déterminer l'affixe e du point E .

3. On appelle G le point tel que le quadrilatère $OFGD$ soit un parallélogramme. Démontrer que l'affixe g du point G est égale à $i(b-1)$.

4. Démontrer que $\frac{e-g}{c-g} = i$ et en déduire que le triangle EGC est rectangle et isocèle.

3. Exercice 2 (spécialistes)

5 points

1. On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs N tels que
$$\begin{cases} N \equiv 5[13] \\ N \equiv 1[17] \end{cases}$$

a. Vérifier que 239 est solution de ce système.

b. Soit N un entier relatif solution de ce système.

Démontrer que N peut s'écrire sous la forme $N = 1 + 17x = 5 + 13y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$.

c. Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où x et y sont des entiers relatifs.

d. En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221k$.

e. Démontrer l'équivalence entre $N \equiv 18[221]$ et
$$\begin{cases} N \equiv 5[13] \\ N \equiv 1[17] \end{cases}$$

2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

a. Existe-t-il un entier naturel k tel que $10^k \equiv 1[17]$?

b. Existe-t-il un entier naturel l tel que $10^l \equiv 18[221]$?

4. Exercice 3

6 points

On considère l'équation notée (E) : $\ln x = -x$.

Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E), admet une solution unique notée α appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour en obtenir un encadrement.

Partie A : existence et unicité de la solution

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.

3. Vérifier que : $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$.

Partie B : encadrement de la solution α

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{4x - \ln x}{5}$.

1. Étude de quelques propriétés de la fonction g .

a. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

b. En déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.

c. Démontrer qu'un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $g(x) = x$.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = g(u_n)$.

a. En utilisant le sens de variation de la fonction g , démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

b. En déduire que la suite (u_n) converge vers α .

3. Recherche d'une valeur approchée de α .

a. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_{10} , arrondie à la sixième décimale.

b. On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α .

En déduire un encadrement de α sous la forme $u \leq \alpha \leq v$ où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales.

5. Exercice 4

4 points

L'exercice comporte quatre questions indépendantes. Pour chacune d'entre elles, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Il s'agit de déterminer la bonne réponse et de justifier le choix ainsi effectué.

Un choix non justifié ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Question 1

La solution f de l'équation différentielle $y' + 2y = 6$ qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$ est définie sur l'ensemble P des nombres réels par :

Réponse (1) : $f(x) = -2e^{-2x} + 3$. Réponse (2) : $f(x) = -2e^{2x} + 3$. Réponse (3) : $f(x) = -2e^{-2x} - 3$.

Question 2

On considère un triangle ABC et on note I le point tel que $2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Les points G , I et A sont alignés lorsque G est le barycentre du système :

Réponse (1) : $\{(A, 1), (C, 2)\}$ Réponse (2) : $\{(A, 1), (B, 2), (C, 2)\}$ Réponse (3) : $\{(A, 1), (B, 2), (C, 1)\}$

Question 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan P d'équation cartésienne :

$x - 3y + 2z = 5$ et le point $A(2; 3; -1)$. Le projeté orthogonal du point A sur le plan P est le point :

Réponse (1) : $H_1(3; -1; 4)$ Réponse (2) : $H_2(4; -3; -4)$ Réponse (3) : $H_3(3; 0; 1)$

Question 4

La valeur moyenne de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est égale à :

Réponse (1) : $-\frac{\pi}{2}$

Réponse (2) : $\frac{\pi}{4}$

Réponse (3) : $\frac{\pi}{2}$.