# France

## 1. Exercice 1

*4 points*

*Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel $n$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$.

On pose, pour tout nombre entier naturel $n$, $v_n = u_n - 6$.

a. Pour tout nombre entier naturel $n$, calculer $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$.Quelle est la nature de la suite $(v_n)$ ?

b. Démontrer que pour tout nombre entier naturel $n$, $u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.

c. Étudier la convergence de la suite $(u_n)$.

2. On considère la suite $(w_n)$ dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geq 1$ :

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \text{ et } w_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite :

| $w_0$ | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$ | $w_7$ | $w_8$ | $w_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |

a. Détailler le calcul permettant d'obtenir $w_{10}$.

b. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Donner la nature de la suite $(w_n)$. Calculer $w_{2009}$.

**Correction**

1. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}u_n + 4 - 6 = \frac{1}{3}(v_n + 6) - 2 = \frac{1}{3}v_n$. C'est une suite géométrique de raison 1/3, de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -5$.

b. On a donc $v_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n$, soit $u_n = v_n + 6 = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.

c. $u_n$ tend vers 6 quand $n$ tend vers l'infini puisque $\left|\frac{1}{3}\right| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

2. a. Remplaçons $n$ par 10 : $10w_{10} = 11w_9 + 1 = 210 \Rightarrow w_{10} = 21$.

b. Il semble assez évident que $w_n = 2n+1$ : par récurrence c'est vrai jusqu'à $n = 10$ ; supposons que c'est vrai pour $n-1$ : $w_{n-1} = 2(n-1)+1 = 2n-1$, alors en remplaçant :

$$nw_n = (n+1)(2n-1)+1 = 2n^2 + 2n - n - 1 + 1 = 2n^2 + n \Rightarrow w_n = \frac{2n^2+n}{n} = 2n+1.$$

On a finalement $w_{2009} = 2\times 2009 + 1 = 5019$.

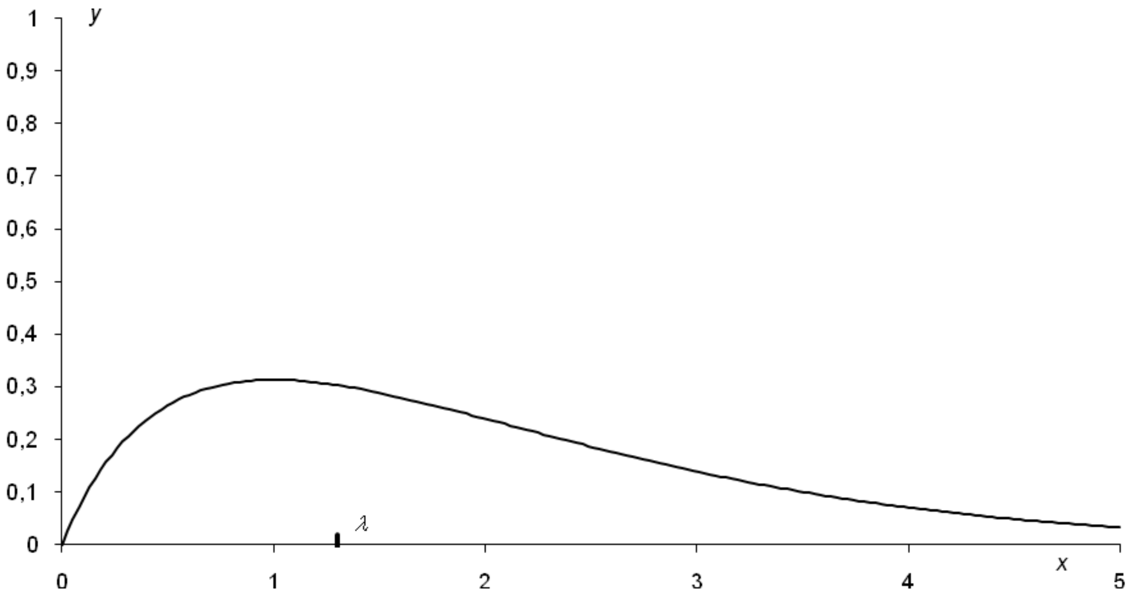
## 2. Exercice 2

*6 points*

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(1 + xe^{-x}\right)$.

On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

On note C la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthogonal. La courbe C est représentée ci-dessous.




**PARTIE I**

1. Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ .

2. Justifier que pour tout nombre réel positif *x*, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.

3. Étudier les variations de la fonction *f* sur l'intervalle [0 ; +∞ [.

**PARTIE II**

Soit $\lambda$ un nombre réel strictement positif. On pose $A(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(x)\,dx$ . On se propose de majorer $A(\lambda)$ à l'aide de deux méthodes différentes.

1. Première méthode

a. Représenter, sur la figure la partie du plan dont l'aire en unité d'aire, est égale à $A(\lambda)$.

b. Justifier que pour tout nombre réel strictement positif, $A(\lambda) \le \lambda \times f(1)$.

2. Deuxième méthode

a. Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\int_0^{\lambda} xe^{-x}\,dx$ en fonction de $\lambda$ .

b. On admet que pour tout nombre réel positif *u*, $\ln(1+u) \le u$ .

Démontrer alors que, pour tout nombre réel $\lambda$ strictement positif, $A(\lambda) \le -\lambda e^{-\lambda} - e^{\lambda} + 1$ .

3. Application numérique : avec chacune des deux méthodes trouver un majorant de *A*(5) arrondi au centième. Quelle méthode donne le meilleur majorant dans le cas où $\lambda = 5$ ?

**Correction**

**PARTIE I**

1. Les croissances comparées donnent $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ln 1 = 0$ .

2. $f'(x)=\dfrac{\left(1+xe^{-x}\right)'}{1+xe^{-x}}=\dfrac{1\times e^{-x}+x\left(-e^{-x}\right)}{1+xe^{-x}}=\dfrac{(1-x)e^{-x}}{1+xe^{-x}}$.

L'exponentielle est toujours > 0, *x* est positif, le seul terme qui peut changer de signe est $1-x$.

3. Lorsque $x\le 1$, $1-x\ge 0$ et donc *f* est croissante ; lorsque $x\ge 1$, $f'$ est négative et *f* est décroissante.

**PARTIE II**

1. a. On colorie l'aire comprise entre C, l'axe (*Ox*), *x*=0 et la droite $x=\lambda$ (f est positive donc pas de problèmes de signes).

b. Comme le maximum de *f* est en 1, d'ordonnée $f(1)$, l'aire en question est inférieure à l'aire d'un rectangle de longueur $\lambda$ et de largeur $f(\lambda)\le f(1)$, soit $A(\lambda)\le\lambda\times f(\lambda)\le\lambda\times f(1)$.

2. a. $\displaystyle\int_0^{\lambda} xe^{-x}dx=\left[-xe^{-x}\right]_0^{\lambda}-\int_0^{\lambda}-e^{-x}dx=-\lambda e^{-\lambda}+\left[-e^{-x}\right]_0^{\lambda}=-\lambda e^{-\lambda}-e^{-\lambda}+1$.

b. $\ln(1+u)\le u\Rightarrow\ln\left(1+xe^{-x}\right)\le xe^{-x}$ car $xe^{-x}\ge 0$. On intègre, ce qui donne $A(\lambda)\le-\lambda e^{-\lambda}-e^{\lambda}+1$.

3. Pour le premier cas : $5f(1)\approx 1{,}57$, pour le deuxième : $-5e^{-5}-e^{-5}+1\approx 0{,}96$. Le plus petit des deux est forcément le meilleur majorant… puisque…

## *3. Exercice 3*

*5 points*

I. *Cette question est une restitution organisée de connaissances.*

*On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que p ≤ n alors* $\dbinom{n}{p}=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel *n* et pour tout nombre entier naturel *p* tels que $1\le p\le n$ on a : $\dbinom{n}{p}=\dbinom{n-1}{p-1}+\dbinom{n-1}{p}$.

II. Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher : 7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3. On tire simultanément deux jetons de ce sac.

1. a. On note A l'évènement « obtenir deux jetons blancs ». Démontrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $\dfrac{7}{15}$.

b. On note B l'évènement « obtenir deux jetons portant des numéros impairs ». Calculer la probabilité de B.

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

**Correction**

I. N'étant pas fana des factorielles, on utilise :

$$\binom{n}{p}=\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p(p-1)\dots 1}\Rightarrow\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\frac{(n-1)\dots(n-1-p+1+1)}{(p-1)\dots 1}+\frac{(n-1)\dots(n-1-p+1)}{p(p-1)\dots 1}$$ d'où

$$\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\frac{p(n-1)\dots(n-p+1)}{p(p-1)\dots 1}+\frac{(n-1)\dots(n-p)}{p(p-1)\dots 1}=\frac{(n-1)\dots(n-p+1)\left[\cancel{p}+n-\cancel{p}\right]}{p(p-1)\dots 1}=\binom{n}{p}.$$

II. Il y a $\binom{10}{2}=\frac{10\times 9}{2}=45$ tirages possibles ; il y a 4 impairs blancs et 2 impairs noirs.

1. a. $p(\text{A})=\frac{\binom{7}{2}}{45}=\frac{\frac{7\times 6}{2}}{45}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}$.

b. $p(\text{B})=\frac{\binom{6}{2}}{45}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$.

c. $\text{A}\cap\text{B}$ = tirer deux jetons blancs impairs : $p(\text{A}\cap\text{B})=\frac{\binom{4}{2}}{45}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$ ; $p(\text{A})\times p(\text{B})=\frac{7}{15}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{45}$, les événements A et B ne sont pas indépendants.

2. a. $p(\text{X}=2)=p(\text{A})=\frac{7}{15}$ ; $p(\text{X}=0)=p(2\text{ noirs})=\frac{\binom{3}{2}}{45}=\frac{1}{15}$, $p(\text{X}=1)=1-\frac{1}{15}-\frac{7}{15}=\frac{7}{15}$.

b. $E(\text{X})=0.\frac{1}{15}+1.\frac{7}{15}+2.\frac{7}{15}=\frac{7}{5}=1,4$.

## *4. Exercice 4 (non spécialistes)*

*5 points*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On associe à tout point $M$ d'affixe $z$ non nulle, le point $M'$ milieu du segment $[MM_1]$ où $M_1$ est le point d'affixe $\frac{1}{z}$. Le point $M'$ est appelé l'image du point $M$.

1. a. Montrer que les distances $OM$ et $OM_1$ vérifient la relation $OM\times OM_1=1$ et que les angles $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_1}\right)$ et $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ vérifient l'égalité des mesures suivante $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_1}\right)=-\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ à $2\pi$ près.

b. Le point $A$ appartient au cercle de centre $O$ et de rayon 2. Construire le point $A'$ image du point $A$. (On laissera apparents les traits de construction).

2. a. Justifier que pour tout nombre complexe $z$ non nul, le point $M'$ a pour affixe $z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

b. Soient $B$ et $C$ les points d'affixes respectives $2i$ et $-2i$. Calculer les affixes des points $B'$ et $C'$ images respectives des points $B$ et $C$.

c. Placer les points $B$, $C$, $B'$ et $C'$ sur la figure.

3. Déterminer l'ensemble des points $M$ tels que $M'=M$.

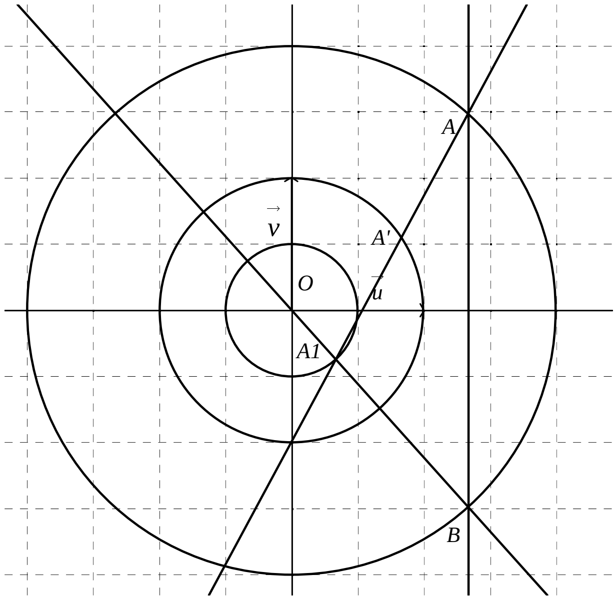
4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Montrer que si le point $M$ appartient au cercle de centre $O$ et de rayon 1 alors son image $M'$ appartient au segment $[KL]$ où $K$ et $L$ sont les points d'affixes respectives $-1$ et $1$.

**Correction**

1. a. $OM\times OM_1=|z|\times\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{|z|}{|z|}=1$ ; $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_1}\right)=\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)=-\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ à $2\pi$ près.

b. Le point $A$ appartient au cercle de centre $O$ et de rayon 2. $B$ est le symétrique de $A$ par rapport à $\left(O\,;\vec{u}\right)$, $A_1$ est sur la droite ($OB$) à la distance 1/2 de $O$, $A'$ est le milieu de [$AA_1$].




2. a. Si $M_1$ a pour affixe $\frac{1}{z}$, le milieu $M'$ de [$MM_1$] a pour affixe $z' = \frac{1}{2}\left(z_M + z_{M_1}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

b. $z_{B'} = \frac{1}{2}\left(2i + \frac{1}{2i}\right) = \frac{1}{2}\left(2i - \frac{1}{2}i\right) = \frac{3}{4}i$,

$z_{C'} = \frac{1}{2}\left(-2i + \frac{1}{-2i}\right) = \frac{1}{2}\left(-2i + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{3}{4}i$.

c. Bof...

3. $z' = z \Leftrightarrow 2z = z + \frac{1}{z} \Leftrightarrow z = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z^2 = 1$ d'où les solutions $z = \pm 1$.

4. Si le point $M$ appartient au cercle de centre $O$ et de rayon 1 alors son affixe est $e^{i\theta}$ et son image $M'$ a pour affixe $z' = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \cos\theta$ qui appartient bien au segment [$KL$]=[−1 ; +1].

## *5. Exercice 4 (spécialistes)*

*5 points*

*Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. a. Déterminer l'ensemble des couples ($x$, $y$) de nombres entiers relatifs, solution de l'équation

(E) : $8x - 5y = 3$.

b. Soit $m$ un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple ($p$, $q$) de nombres entiers vérifiant $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$. Montrer que le couple ($p$, $q$) est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9$ (modulo 40).

c. Déterminer le plus petit de ces nombres entiers $m$ supérieurs à 2 000.

2. Soit $n$ un nombre entier naturel.

a. Démontrer que pour tout nombre entier naturel $k$ on a : $2^{3k} \equiv 1$(modulo 7).

Quel est le reste dans la division euclidienne de $2^{2009}$ par 7 ?

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soient $a$ et $b$ deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.

On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.

On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels $N$ ceux qui sont divisibles par 7.

a. Vérifier que $10^3 \equiv -1$(modulo 7).

b. En déduire tous les nombres entiers $N$ cherchés.

**Correction**

1. a. Solution évidente : (1, 1), puis en soustrayant : $8(x-1) - 5(y-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 5k \\ y = 1 + 8k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

b. On calcule $p = \frac{m-1}{8}$ et $q = \frac{m-1}{5}$ puis on remplace : $8\left(\frac{m-1}{8}\right) - 5\left(\frac{m-4}{5}\right) = m - 1 - m + 4 = 3$. Ok.

Comme $p$ et $q$ sont solutions de (E), ils sont de la forme du 1. a. : $m=8p+1=8(1+5k)+1=9+40k$ et pareil avec $q$.

c. $m\geq 2000 \Leftrightarrow 9+40k\geq 2000 \Leftrightarrow k\geq 49,... \Rightarrow k_{\min}=50 \Rightarrow m=2009$ ... ah, ah, ah...

2. a. $2^{3k}=\left(2^3\right)^k=8^k\equiv 1^k[7]\equiv 1[7]$. $2^{2009}=2^{2007}\times 2^2\equiv 4[7]$ : le reste est 4.

3. a. $10\equiv 3[7]\Rightarrow 10^3\equiv 27[7]\equiv 6[7]\equiv -1[7]$.

b. $N=a\times 10^3+b\equiv a\times(-1)+b[7]\equiv b-a[7]$, il faut donc que $b-a\equiv 0[7]$, soit $b=a$ ou $b=a+7$ ou $a=b+7$ :

($a$, $b$)=(1, 1) ; (1, 8) ; (2, 2) ; (2 , 9) ; (3, 3) ; (4, 4) ; (5, 5) ; (6, 6) ; (7, 7) ; (7, 0) ; (8, 1) ; (8, 8) ; (9, 2) ; (9, 9).

J'espère que je n'en ai pas oublié...