Liban

1. Exercice 1

1) $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$ car les événements A et B sont indépendants.

D'où : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=p(A)+p(B)-p(A)\times p(B)$. Or $p(A)=1-p(\overline{A})$.

$p(A\cup B)=1-p(\overline{A})+p(B)-\left(1-p(\overline{A})\right)\times p(B)=1-p(\overline{A})+p(\overline{A})\times p(B)$.

Donc $p(B)=\dfrac{p(A\cup B)-1+p(\overline{A})}{p(\overline{A})}=\dfrac{\frac{4}{5}-1+\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{2}{3}$. **La réponse correcte est donc la : b**.

2) $p(X>5)=1-p(X\le 5)=1-\int_0^5 0{,}04\mathrm{e}^{-0{,}04x}dx=1-\left[-\mathrm{e}^{-0{,}04x}\right]_0^5=\mathrm{e}^{-0{,}2}\approx 0{,}82$.

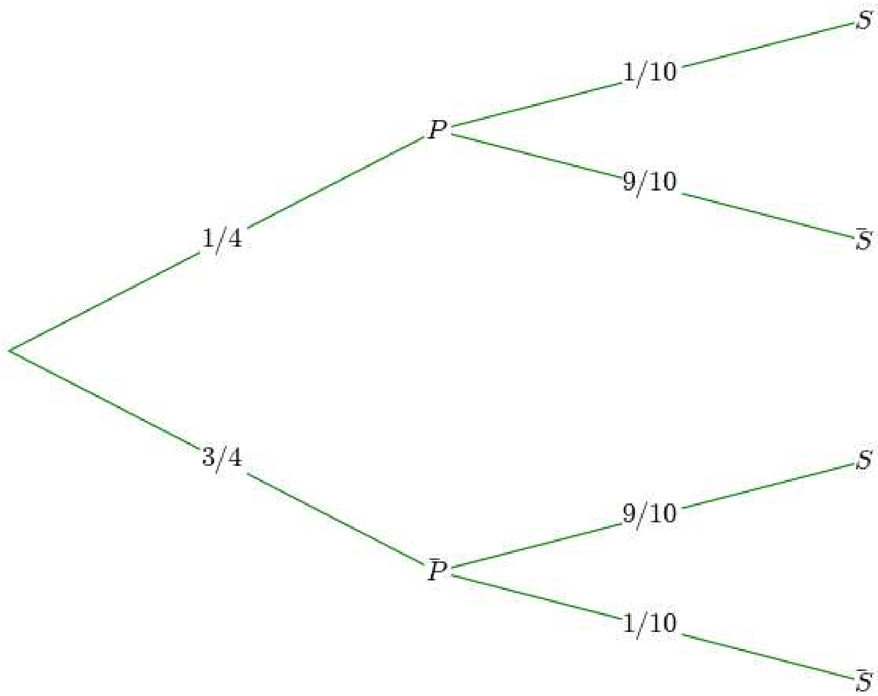
La réponse correcte est donc la : d.

3) Soit les événements suivants : P : « il pleut » et S : « je sors mon chien ».

Dans ma rue, il pleut une fois sur 4 ; alors $p(S)=\dfrac{1}{4}$.

S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\dfrac{1}{10}$; alors $p_P(S)=\dfrac{1}{10}$.

S'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\dfrac{9}{10}$; alors $p_{\overline{P}}(S)=\dfrac{9}{10}$.



On est amené à rechercher $p_S(\overline{P})$. Or $p_S(\overline{P})=\dfrac{p(\overline{P}\cap S)}{p(S)}=\dfrac{\frac{3}{4}\times\frac{9}{10}}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}+\frac{3}{4}\times\frac{9}{10}}=\dfrac{\frac{27}{40}}{\frac{28}{40}}=\dfrac{27}{28}$.

La réponse correcte est donc la : d.

2. Exercice 2

Partie A

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. D'où, par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+e^{-x}\right) = 1$.

Or $\lim\limits_{X\to1} \ln X = 0$. Donc, par limite d'une fonction composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+e^{-x}\right) = 0$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}x\right) = +\infty$. Par conséquent, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{3}x + h(x)$ avec $h(x) = \ln\left(1+e^{-x}\right)$. Or, d'après la question précédente,

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$. Donc **la droite $(\mathbf{D})$ d'équation $\boldsymbol{y = \frac{1}{3}x}$ est asymptote à la courbe $(\mathbf{C})$ au voisinage de $+\infty$**.

c) Étudions le signe de $f(x) - \dfrac{1}{3}x$, c'est-à-dire de $h(x)$.

Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$, et par suite, $1+e^{-x} > 1$. Comme la fonction ln est strictement croissante sur $]1\,;\,+\infty[$, alors $\ln\left(1+e^{-x}\right) > 0$. Donc, $h(x) > 0$ pour tout réel x.

Par conséquent, $(\mathbf{C})$ **est au-dessus de** $(\mathbf{D})$ sur $\mathbf{R}$.

d) Soit un réel x.

$$f(x) = \frac{1}{3}x + \ln\left(1+e^{-x}\right) = \frac{1}{3}x + \ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right) = \frac{1}{3}x + \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right) = \frac{1}{3}x + \ln\left(e^x+1\right) - \ln\left(e^x\right) = \frac{1}{3}x + \ln\left(e^x+1\right) - x$$

Par conséquent, $\boldsymbol{f(x) = \ln\left(e^x+1\right) - \frac{2}{3}x}$**, pour tout réel $\boldsymbol{x}$**.

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. D'où, par somme de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+e^x\right) = 1$.

Or $\lim\limits_{X\to1} \ln X = 0$. Donc, par limite d'une fonction composée, $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(1+e^x\right) = 0$.

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{2}{3}x\right) = +\infty$. Par conséquent, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$.

2) a) On a $f = u + \ln(v)$ avec $u(x) = \dfrac{1}{3}x$ et $v(x) = 1+e^{-x}$.

Comme la fonction v est dérivable et strictement positive sur $\mathbf{R}$, alors la fonction $\ln(v)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$. La fonction u est dérivable sur $\mathbf{R}$.
Donc f est dérivable sur $\mathbf{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$.

Alors : $f' = u' + \dfrac{v'}{v}$ avec $u'(x) = \dfrac{1}{3}$ et $v'(x) = -e^{-x}$.

D'où : $f'(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{1+e^{-x}-3e^{-x}}{3\left(1+e^{-x}\right)} = \dfrac{1-2e^{-x}}{3\left(1+e^{-x}\right)} = \dfrac{\left(1-2e^{-x}\right)\times e^x}{3\left(1+e^{-x}\right)\times e^x} = \dfrac{e^x-2}{3\left(e^x+1\right)}$.

Par conséquent, **pour tout réel $\boldsymbol{x}$,** $\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{e^x-2}{3\left(e^x+1\right)}}$.

b) Pour tout réel x, $3\left(e^{x}+1\right)>0$; alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $\left(e^{x}-2\right)$. Or :

- $e^{x}-2=0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{x}=2 \quad\Leftrightarrow\quad x=\ln(2)$;
- $e^{x}-2>0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{x}>2 \quad\Leftrightarrow\quad x>\ln(2)$;
- $e^{x}-2<0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{x}<2 \quad\Leftrightarrow\quad x<\ln(2)$.

On en déduit que **la fonction f est décroissante sur $\left]-\infty\,;\,\ln(2)\right]$ et croissante sur $\left[\ln(2)\,;+\infty\right[$**.

Partie B

1) D'après la partie A, la courbe (C) est au-dessus de (D) sur $\mathbf{R}$, donc sur $[0\,;n]$, alors

$\boldsymbol{d_n}=\int_0^n\left[f(x)-\frac{1}{3}x\right]dx=\boldsymbol{\int_0^n \ln\left(1+e^{-x}\right)dx}$, **pour tout entier naturel n non nul**.

2) On admet que, pour tout réel x, $\ln\left(1+e^{-x}\right)\le e^{-x}$.

Comme les fonctions $x\mapsto\ln\left(1+e^{-x}\right)$ et $x\mapsto e^{-x}$ sont continues sur $\mathbf{R}$, donc sur $[0\,;n]$, alors d'après le respect de l'ordre par l'intégration, $\int_0^n \ln\left(1+e^{-x}\right)dx\le\int_0^n e^{-x}dx$.

Or $\int_0^n e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^n=\left(-e^{-n}\right)-\left(-e^{0}\right)=1-e^{-n}$. Donc : $d_n\le 1-e^{-n}$.

De plus, $\left(1-e^{-n}\right)-1=-e^{-n}$. Comme $-e^{-n}<0$ pour tout entier naturel n non nul, $\left(1-e^{-n}\right)-1\le 0$, c'est-à-dire $1-e^{-n}\le 1$.

Par conséquent, **pour tout entier naturel n non nul, $d_n\le 1$**.

3) Soit n un entier naturel non nul.

$d_{n+1}-d_n=\int_0^{n+1}\ln\left(1+e^{-x}\right)dx-\int_0^{n}\ln\left(1+e^{-x}\right)dx=\int_0^{n+1}\ln\left(1+e^{-x}\right)dx+\int_n^{0}\ln\left(1+e^{-x}\right)dx$.

Alors, $d_{n+1}-d_n=\int_n^{n+1}\ln\left(1+e^{-x}\right)dx$.

Comme la fonction $x\mapsto\ln\left(1+e^{-x}\right)$ est strictement positive sur $\mathbf{R}$ (d'après la question 1) c) de la partie A) et que $n<n+1$, alors $\int_n^{n+1}\ln\left(1+e^{-x}\right)dx>0$.

Par conséquent, la suite $(d_n)_{n\ge1}$ est croissante.

Comme la suite $(d_n)_{n\ge1}$ est également majorée par 1 (d'après la question précédente), on en déduit que **la suite $(d_n)_{n\ge1}$ est convergente**.

Partie C

1) Le coefficient directeur de (T) est le nombre dérivé de f en 0.

Or $f'(0)=\dfrac{e^{0}-2}{3\left(e^{0}+1\right)}=\dfrac{-1}{6}$; donc **le coefficient directeur de (T) est égal à $-\dfrac{1}{6}$**.

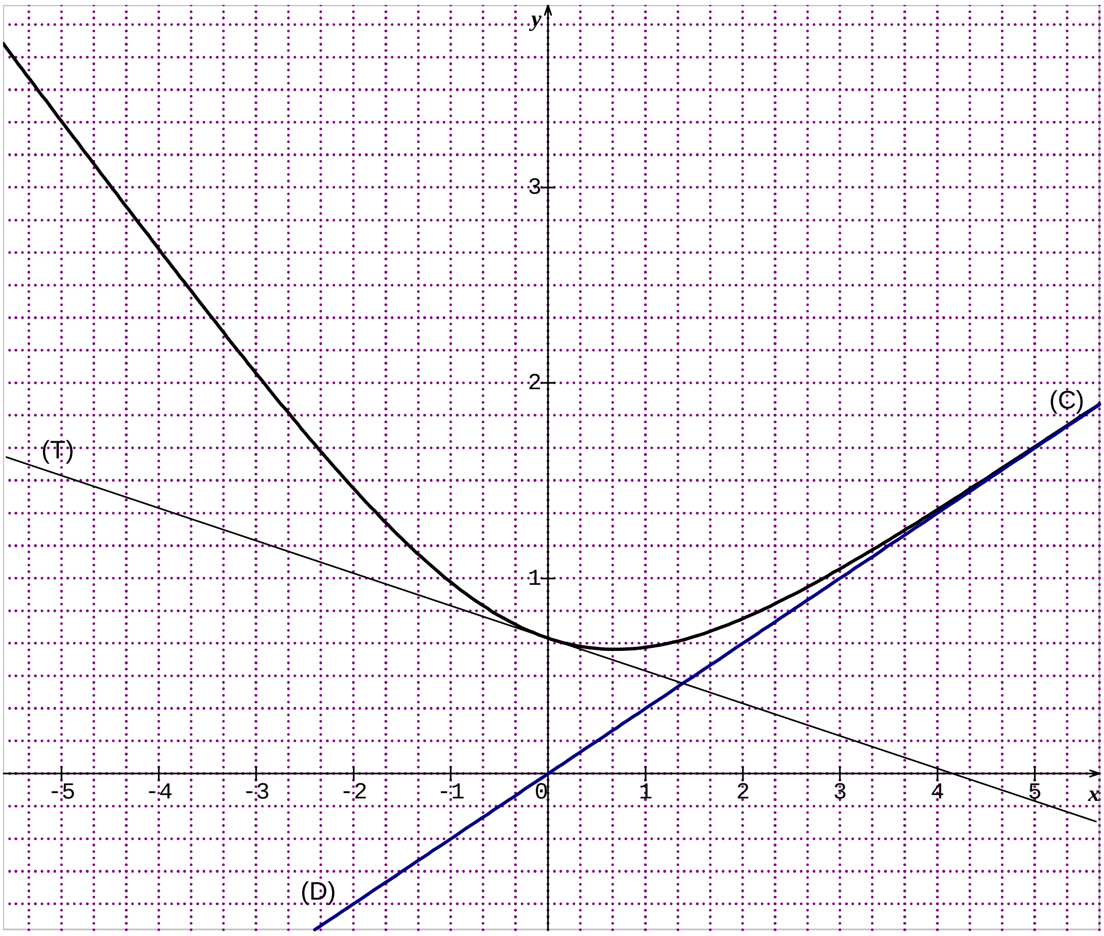
2) Soit a un réel non nul.
Soit M et N les points de (C) d'abscisses respectives $-a$ et a.

Le coefficient directeur de la droite (MN) est égale à $\dfrac{y_N - y_M}{x_N - x_M}$.

Or $\dfrac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \dfrac{\left[\dfrac{a}{3} + \ln\left(1+e^{-a}\right)\right] - \left[\dfrac{-a}{3} + \ln\left(1+e^{a}\right)\right]}{a-(-a)} = \dfrac{\dfrac{2a}{3} + \ln\left(\dfrac{1+e^{a}}{e^{a}}\right) - \ln\left(1+e^{a}\right)}{2a}$.

Alors, $\dfrac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \dfrac{\dfrac{2a}{3} + \ln\left(1+e^{a}\right) - \ln\left(e^{a}\right) - \ln\left(1+e^{a}\right)}{2a} = \dfrac{\dfrac{2a}{3} - a}{2a} = \dfrac{-\dfrac{a}{3}}{2a} = -\dfrac{1}{6}$.

Comme $\dfrac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = f'(0)$, alors **les droites (MN) et (T) sont parallèles**.



3. *Exercice 3*

1) a) Dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$, les points A, B, C, D, E, F, G et H ont respectivement
pour coordonnées $(0\ ;0\ ;0)$, $(1\ ;0\ ;0)$, $(1\ ;1\ ;0)$, $(0\ ;1\ ;0)$, $(0\ ;0\ ;1)$, $(1\ ;0\ ;1)$, $(1\ ;1\ ;1)$ et $(0\ ;1\ ;1)$.

Comme I est le milieu de $[EF]$, alors **I a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 1\right)$**.

Comme J est symétrique de E par rapport à F, alors $\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{EF}$.

D'où : $\begin{cases} x_J - x_F = x_{\overrightarrow{EF}} \\ y_J - y_F = y_{\overrightarrow{EF}} \\ z_J - z_F = z_{\overrightarrow{EF}} \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x_J = 1+1 \\ y_J = 0+0 \\ z_J = 0+1 \end{cases}$. D'où ***J* a pour coordonnées $(\mathbf{2}\ ;\ \mathbf{0}\ ;\ \mathbf{1})$**.

b) $\overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{BG} = (2-0)\times(1-1)+(0-1)\times(1-0)+(1-0)\times(1-0) = 0-1+1 = 0$.

$\overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{BI} = (2-0)\times\left(\frac{1}{2}-1\right)+(0-1)\times(0-0)+(1-0)\times(1-0) = -1+0+1 = 0$.

Donc le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BI}$ du plan (BGI). Par conséquent, **$\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI)**.

c) $$\begin{aligned} M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (BGI) &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{DJ} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)\times 2 + (y-0)\times(-1) + (z-0)\times 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - y + z - 2 = 0 \end{aligned}$$

Donc **(BGI) a pour équation cartésienne $2x - y + z - 2 = 0$**.

d) La distance du point F au plan (BGI) est égale à $\dfrac{|2x_F - y_F + z_F - 2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}$.

Or $\dfrac{|2x_F - y_F + z_F - 2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \dfrac{|2-0+1-2|}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

Donc **la distance du point *F* au plan (BGI) est égale à $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$**.

2) a) Comme (Δ) est la droite orthogonale au plan (BGI), alors elle a pour vecteur directeur $\overrightarrow{DJ}$. Donc **une représentation paramétrique de (Δ) est** :

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -t \\ z = 1+t \end{cases} \quad \textbf{avec} \quad (t \in \mathbb{R})$$

b) Soit K le centre de la face $ADHE$. Alors K est le milieu de $[AH]$, et par suite, K a pour coordonnées $\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{cases} 1+2t = x_K \\ -t = y_K \\ 1+t = z_K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2t = 0 \\ -t = \frac{1}{2} \\ 1+t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

On en déduit que ***K* est un point de (Δ)**.

c)

$$M(x\ ;y\ ;z)\in(BG\mathcal{I})\cap(\Delta)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}2x-y+z-2=0\\x=1+2t\\y=-t\\z=1+t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}2+4t+t+1+t-2=0\\x=1+2t\\y=-t\\z=1+t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}6t+1=0\\x=1+2t\\y=-t\\z=1+t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}t=-\dfrac{1}{6}\\x=\dfrac{2}{3}\\y=\dfrac{1}{6}\\z=\dfrac{5}{6}\end{cases}$$

Donc **la droite (Δ) et le plan $(BG\mathcal{I})$ sont sécants en un point L de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{6}\ ;\ \frac{5}{6}\right)$**.

d) Soit $M(x\ ;y\ ;z)$ l'orthocentre du triangle $BG\mathcal{I}$. Alors :

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathcal{I}M}\cdot\overrightarrow{BG}=0\\\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{\mathcal{I}G}=0\\\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{\mathcal{I}B}=0\\M\in(BG\mathcal{I})\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\times0+y\times1+(z-1)\times1=0\\(x-1)\times\dfrac{1}{2}+y\times1+z\times0=0\\(x-1)\times\dfrac{1}{2}+(y-1)\times0+(z-1)\times(-1)=0\\2x-y+z-2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}y+z-1=0\\\dfrac{1}{2}x+y-\dfrac{1}{2}=0\\\dfrac{1}{2}x-z+\dfrac{1}{2}=0\\2x-y+z-2=0\end{cases}$$

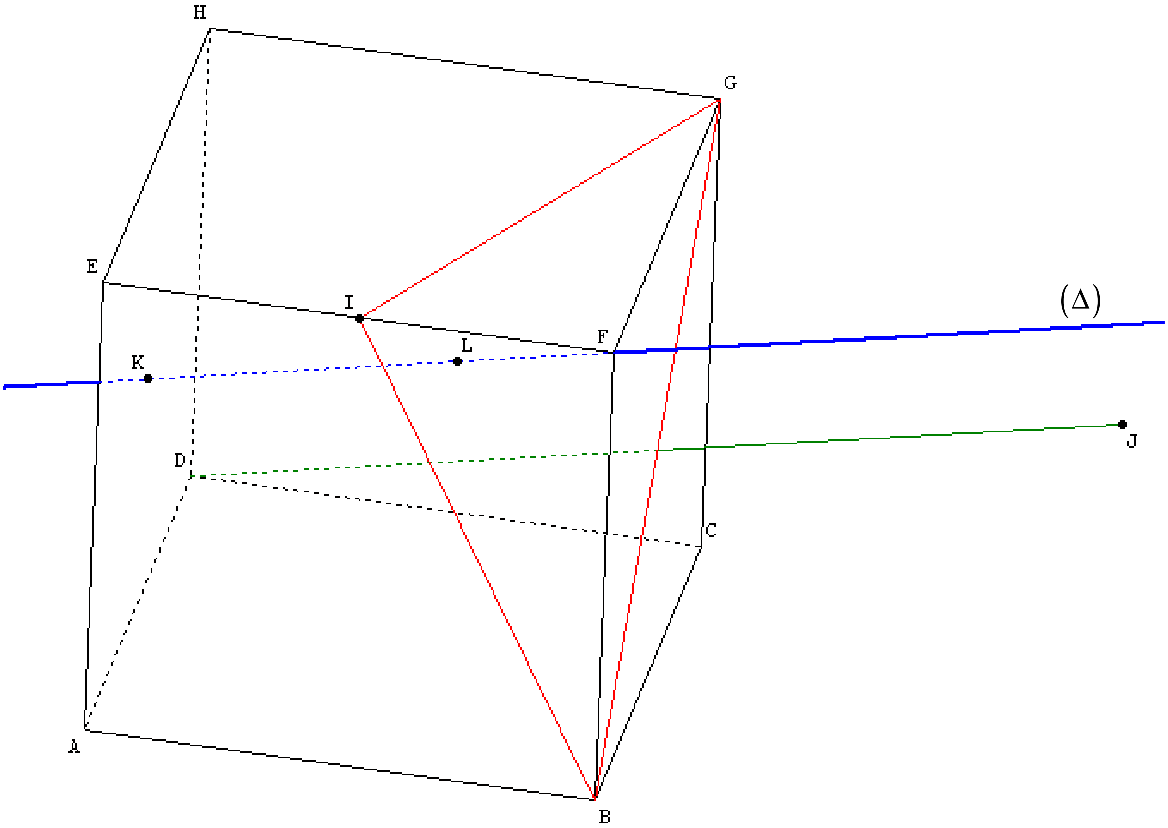
$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}y=1-z\\\dfrac{1}{2}x-z+\dfrac{1}{2}=0\\2x-y+z-2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{BG}=0 \\ \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{IG}=0 \\ \overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{IB}=0 \\ M\in(BGI) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-z \\ x=2z-1 \\ 2z-2-1+z+z-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1-z \\ x=2z-1 \\ 4z-2-1+z+z-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{6} \\ x=\dfrac{2}{3} \\ z=\dfrac{5}{6} \end{cases}$$

Par conséquent, **l'orthocentre du triangle *BGI* est le point *L***.



4. *Exercice 4 (enseignement obligatoire)*

Partie A

1) $|z_A|=\sqrt{\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$. Alors $\boldsymbol{z_A}=-\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right]=\boldsymbol{\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}}$.

Comme $z_B=\overline{z_A}$, alors $\boldsymbol{z_B=\sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}}$.

2) Voir ci-dessous.

3) $AB = |z_B - z_A| = |-i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$; $AC = |z_C - z_A| = \left|-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$ et

$BC = |z_C - z_B| = \left|-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$. Donc ***ABC* est un triangle équilatéral**.

Partie B

1) a) $\boldsymbol{z_{A'}} = \frac{1}{3}i\ z_A{}^2 = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = \mathbf{e^{i\frac{13\pi}{6}}} = \mathbf{e^{i\frac{\pi}{6}}}$;

$\boldsymbol{z_{B'}} = \frac{1}{3}i\ z_B{}^2 = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = \mathbf{e^{-i\frac{7\pi}{6}}} = \mathbf{e^{i\frac{5\pi}{6}}}$ et $\boldsymbol{z_{C'}} = \frac{1}{3}i\ z_C{}^2 = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \times 9 = \mathbf{3e^{i\frac{\pi}{2}}}$.

b) Voir ci-dessous.

c) $z_{\overrightarrow{OB'}} = z_{B'} = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $z_{\overrightarrow{OA}} = z_A = \sqrt{3}\ e^{i\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{3}\ z_{\overrightarrow{OB'}}$. D'où : $\overrightarrow{OA} = \sqrt{3}\ \overrightarrow{OB'}$.
Par suite, **les points *O*, *A* et *B'* sont alignés**.

$\overrightarrow{OB}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{3}{2}\ ;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\overrightarrow{OA'}$ a pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

D'où : $\overrightarrow{OB} = -\sqrt{3}\ \overrightarrow{OA'}$. Par suite, **les points *O*, *A'* et *B* sont alignés**.

2) a) Comme G est l'isobarycentre des points O, A, B et C, alors pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\ \overrightarrow{MG}$.
Prenons $M = O$; on obtient : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\ \overrightarrow{OG}$.

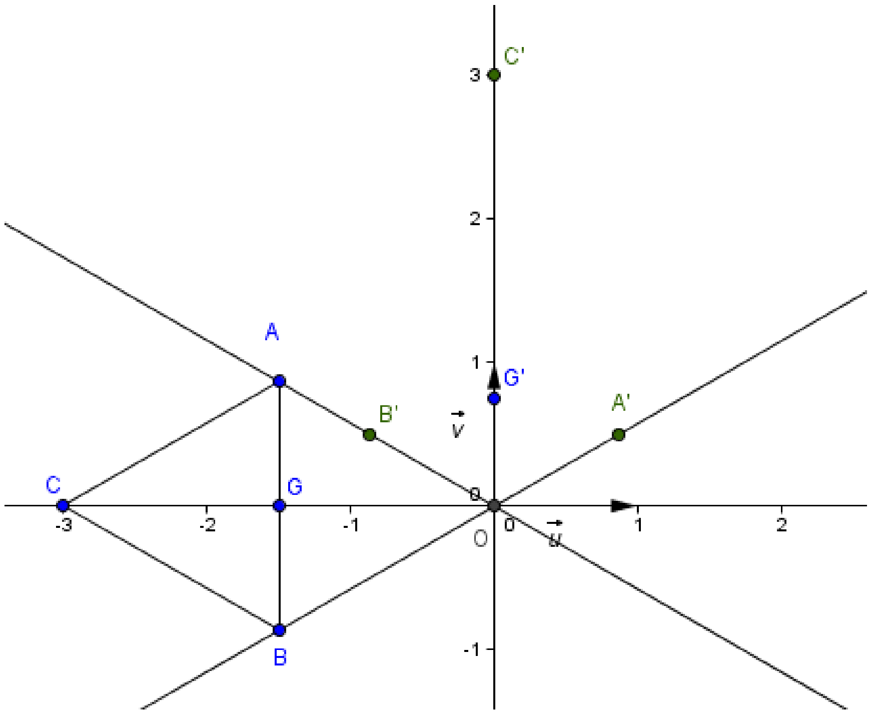
Par suite, $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{4} = \frac{\left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3}{4} = \frac{-6}{4}$.

Donc ***G* a pour affixe $-\frac{3}{2}$**.

Par conséquent, $\boldsymbol{z_{G'}} = \frac{1}{3}i\ z_G{}^2 = \frac{1}{3}i \times \frac{9}{4} = \boldsymbol{\frac{3}{4}i}$

b) Soit H l'isobarycentre des points O', A', B' et C'.

Alors $z_H = \frac{z_{O'} + z_{A'} + z_{B'} + z_{C'}}{4} = \frac{0 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + 3i}{4} = i$. Comme H et G' sont distinct, alors ***G'* n'est pas l'isobarycentre des points *O'*, *A'*, *B'* et *C'***.



3) Si M appartient à (AB), alors $z_M = -\frac{3}{2} + it$ où t est un réel.

Alors $z_{M'} = \frac{1}{3}i\left(-\frac{3}{2} + it\right)^2 = \frac{1}{3}i\left(\frac{9}{4} - 3it - t^2\right) = t + i\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}t^2\right)$, c'est-à-dire $\begin{cases} x_{M'} = t \\ y_{M'} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3}t^2 \end{cases}$.

Par conséquent, **si M appartient à (AB), alors M' appartient à la parabole d'équation $y = \frac{3}{4} - \frac{1}{3}t^2$**.

5. Exercice 4 (enseignement de spécialité)