

Liban**1. Exercice 1**

3 points

Pour chacune des trois questions, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie, sans justification. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. On désigne par A et B deux événements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité p .

On sait que $p(A \cup B) = \frac{4}{5}$ et $p(\bar{A}) = \frac{3}{5}$. La probabilité de l'évènement B est égale à :

- a. $\frac{2}{5}$ b. $\frac{2}{3}$ c. $\frac{3}{5}$ d. $\frac{1}{2}$

2. On note X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,04$.

On rappelle que pour tout réel t positif, la probabilité de l'évènement $X \leq t$, notée $p(X \leq t)$, est donnée

par $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$. La valeur approchée de $p(X > 5)$ à 10^{-2} près par excès est égale à :

- a. 0,91 b. 0,18 c. 0,19 d. 0,82

3. Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre. S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\frac{1}{10}$;

s'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\frac{9}{10}$. Je sors mon chien ; la probabilité qu'il ne pleuve pas est égale à :

- a. $\frac{9}{10}$ b. $\frac{27}{40}$ c. $\frac{3}{4}$ d. $\frac{27}{28}$

2. Exercice 2

8 points

On considère la fonction f définie sur \mathbb{P} par $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x$.

La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée ci-dessous. Cette figure sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe (C). Tracer (D).

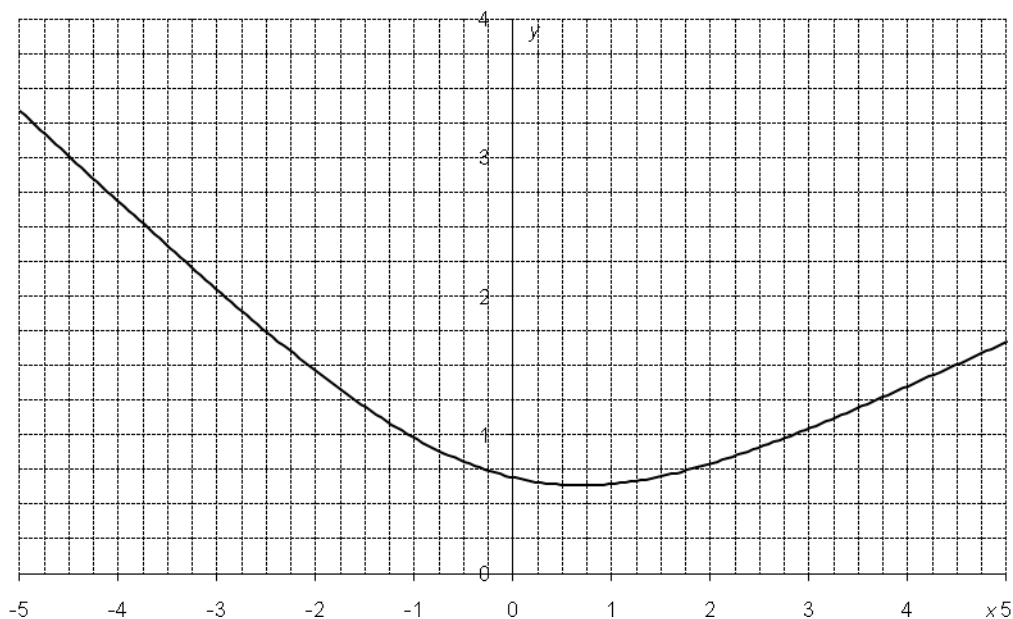
c. Étudier les positions relatives de (D) et de (C).

d. Montrer que pour tout réel x , $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$.

e. En déduire la limite de f en $-\infty$.

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \frac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}$.

b. En déduire les variations de la fonction f .



Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle d_n , l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $d_n = \int_0^n \ln(1 + e^{-x}) dx$.

2. On admet que pour tout réel x , $\ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $d_n \leq 1$. La suite (d_n) est-elle convergente ?

Partie C

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe (C).

On note (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique.

2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soient M et N deux points de la courbe (C) d'abscisses non nulles et opposées. Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (T).

3. Exercice 3

4 points

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1.

On désigne par I le milieu de $[EF]$ et par J le symétrique de E par rapport à F .

Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. a. Déterminer les coordonnées des points I et J .

b. Vérifier que le vecteur \overrightarrow{DJ} est un vecteur normal au plan (BGI) .

c. En déduire une équation cartésienne du plan (BGI) .

d. Calculer la distance du point F au plan (BGI) .

2. On note (Δ) la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI) .

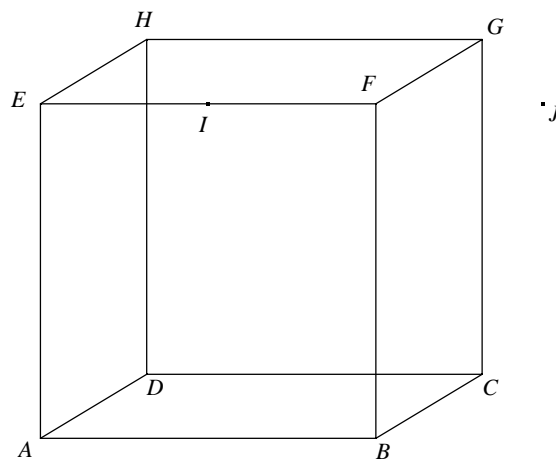
a. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) .

b. Montrer que la droite (Δ) passe par le centre K de la face $ADHE$.

c. Montrer que la droite (Δ) et le plan (BGI) sont sécants en un point, noté L , de coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$.

d. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le point L est-il l'orthocentre du triangle BGI ?



4. Exercice 4 (non spécialistes)

5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_B = \overline{z_A}$ et $z_C = -3$.

Partie A

1. Écrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.
2. Placer les points A, B et C .
3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

Soit f l'application qui, à tout point M d'affixe z du plan, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{3}iz^2$.

On note O', A', B' et C' les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C .

1. a. Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C' .
- b. Placer les points A', B' et C' .
- c. Démontrer l'alignement des points O, A et B' ainsi que celui des points O, B et A' .
- d. Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C . On note G' le point associé à G par f . Déterminer les affixes des points G et G' .

Le point G' est-il l'isobarycentre des points O', A', B' et C' ?

2. Démontrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$. (On ne demande pas de tracer cette parabole)

5. Exercice 4 (spécialistes)

5 points

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009[10000]$.

Partie A

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16.

2. En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009[16]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = 2009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1.$$

1. a. Démontrer que u_0 est divisible par 5.

b. Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n \left(u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1) \right).$$

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n est divisible par 5^{n+1} .

2. a. Vérifier que $u_3 = 2009^{250} - 1$ puis en déduire que $2009^{250} \equiv 1[625]$.

b. Démontrer alors que $2009^{8001} \equiv 2009[625]$.

Partie C

1. En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que $2009^{8001} - 2009$ est divisible par 10 000.

2. Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009.

Correction

Partie A

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16 : $2009^2 = 4036081 = 16 \times 252255 + 1$, donc le reste est 1 et $2009^2 \equiv 1[16]$.

2. En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009[16]$: $2009^{8001} = 2009^{8000} \times 2009^1$, or $2009^{8000} = (2009^2)^{4000}$; comme $2009^2 \equiv 1[16]$, on a $(2009^2)^{4000} \equiv 1[16]$ et $2009^{8001} \equiv 2009[16]$.

Partie B $u_0 = 2009^2 - 1$ et $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$

1. a. Montrer que u_0 est divisible par 5 : $u_0 = 4036080 = 5 \times 807216$ donc u_0 est divisible par 5.

b. Montrer que $u_{n+1} = u_n \left(u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1) \right)$: $(u_n + 1)^5 = u_n^5 + 5u_n^4 + 10u_n^3 + 10u_n^2 + 5u_n + 1$ d'après la formule du binôme d'où $u_{n+1} + 1 = (u_n + 1)^5 = u_n^5 + 5u_n^4 + 10u_n^3 + 10u_n^2 + 5u_n + 1$ et donc $u_{n+1} = u_n^5 + 5u_n^4 + 10u_n^3 + 10u_n^2 + 5u_n$.

Par ailleurs : $u_n \left(u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1) \right) = u_n^5 + 5u_n^4 + 10u_n^3 + 10u_n^2 + 5u_n = u_{n+1}$.

c. Montrer par récurrence que u_n est divisible par 5 :

* u_0 est divisible par 5 d'après 1.a ;

* supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5^{n+1}k$ avec $k \in \mathbb{N}$, montrons qu'alors $u_{n+1} = 5^{n+2}k'$

avec $k' \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n \left(u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1) \right) = 5^{n+1}k \left((5^{n+1}k)^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1) \right)$, soit

$u_{n+1} = 5^{n+1}k \left(\left(5^{4n+4} k^4 \right) + 5 \left(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1 \right) \right) = 5^{n+1}k(5l) = 5^{n+2}k'$ avec $l \in \square$ et $k' \in \square$ (les u_n étant des entiers naturels). On a donc bien u_n divisible par 5 pour tout $n \in \square$.

2. a. Montrer que $u_3 = 2009^{250} - 1$ et que $2009^{250} \equiv 1[625]$: on a $u_{n+1} + 1 = (u_n + 1)^5$ et $u_0 + 1 = 2009^2$ d'où $u_1 + 1 = (u_0 + 1)^5 = 2009^{10}$, $u_2 + 1 = (u_1 + 1)^5 = 2009^{50}$ et $u_3 + 1 = (u_2 + 1)^5 = 2009^{250}$.

Comme u_3 est divisible par $5^4 = 625$ on en déduit que $u_3 \equiv 0[625]$ d'où $u_3 + 1 \equiv 1[625]$ et donc $2009^{250} \equiv 1[625]$.

2. b. Montrer que $2009^{8001} \equiv 2009[625]$: $2009^{8001} = 2009^{8000} \times 2009^1 = (2009^{250})^{32} \times 2009$ et comme $2009^{250} \equiv 1[625]$ $2009^{8000} \equiv 1[625]$ et $2009^{8001} \equiv 2009[625]$.

Partie C

1. Montrer que $2009^{8001} - 2009 \equiv 0[10000]$: on a vu précédemment que $2009^{8001} \equiv 2009[16]$ et que $2009^{8001} \equiv 2009[625]$. On en déduit que $N = 2009^{8001} - 2009$ est à la fois multiple de 16 et de 625 ; or si un entier est divisible par deux entiers premiers entre eux il est divisible par leur produit (conséquence du théorème de Gauss).

Comme 16 et 625 sont premiers entre eux, N est divisible par $16 \times 625 = 10000$.

2. Déterminer un entier tel que $n^3 \equiv 2009[10000]$: on sait que $2009^{8001} - 2009 \equiv 0[10000]$, soit que $2009^{8001} \equiv 2009[10000]$. Or $8001 = 3 \times 2667$, on a donc $(2009^{2667})^3 \equiv 2009[10000]$ et 2009^{2667} a l'écriture décimale de son cube qui se termine par 2009.