Polynésie

1. Exercice 1

4 points

Une entreprise fabrique des lecteurs MP3 dont 6 % sont défectueux.

Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite.

Cette unité de contrôle rejette 98 % des lecteurs MP3 défectueux et 5% des lecteurs MP3 fonctionnant correctement.

On note :

- D l'évènement : « le lecteur MP3 est défectueux » ;
- R l'évènement : « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ».

1. Faire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.

2. a. Calculer la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté.

b. On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque le lecteur MP3 est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux.

Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.

3. Montrer que la probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à 0,8942.

4. Quatre contrôles successifs indépendants sont maintenant réalisés pour savoir si un lecteur MP3 peut être commercialisé. Un lecteur MP3 est :

- commercialisé avec le logo de l'entreprise s'il subit avec succès les quatre contrôles successifs,
- détruit s'il est rejeté au moins deux fois,
- commercialisé sans le logo sinon.

Le coût de fabrication d'un lecteur MP3 s'élève à 50 euros. Son prix de vente est de 120 euros pour un lecteur avec logo et 60 euros pour un lecteur sans logo.

On désigne par G la variable aléatoire qui, à chaque lecteur MP3 fabriqué, associe le gain algébrique en euros (éventuellement négatif) réalisé par l'entreprise.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

b. Calculer à 10^{-2} près l'espérance mathématique de G. Donner une interprétation de ce résultat.

2. Exercice 2 (non spécialistes)

5 points

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct. On supposera connus les résultats suivants :

• Pour tous points A, B et C du plan d'affixes respectives a, b et c, avec $A \neq C$ et $A \neq B$:

$$\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = \frac{AB}{AC} \text{ et } \arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + k \times 2\pi \text{ où } k \text{ est un entier relatif ;}$$

• Soit z un nombre complexe et soit θ un nombre réel :

$$z = e^{i\theta} \text{ si et seulement si } |z| = 1 \text{ et } \arg(z) = \theta + k \times 2\pi \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

Démontrer que la rotation r d'angle θ et de centre Ω d' affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).

Soit f l'application qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = iz + 4 + 4i$.

Devoir.tn Toutes les matières, tous les niveaux...

1. a. Déterminer l'affixe ω du point Ω telle que $f(\omega) = \omega$.

b. Montrer que, pour tout nombre complexe z on a : $z' - 4i = i(z - 4i)$.

c. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

2. On note A et B les points d'affixes respectives $a = 4 - 2i$ et $b = -4 + 6i$.

a. Placer les points A, B et Ω sur une figure que l'on completera au fur et à mesure des questions.

b. Déterminer les affixes des points A' et B' images respectives des points A et B par f.

3. On appelle m, n, p et q les affixes des points M, N, P et Q, milieux respectifs des segments $[AA']$, $[A'B]$, $[BB']$ et $[B'A]$.

a. Déterminer m. On admettra que $n = 1+7i$, $p = -3+3i$ et $q = 1 - i$.

b. Démontrer que $MNPQ$ est un parallélogramme.

c. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{q-m}{n-m}$. En déduire la nature du quadrilatère $MNPQ$.

4. Démontrer que les droites $(B'A)$ et (ΩN) sont perpendiculaires.

3. Exercice 2 (spécialistes)

5 points

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est muni d'un repère orthononnal direct.

On supposera connu le résultat suivant :

Une application f du plan dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $b \in \mathbb{C}$.

Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points teIs que A est distinct de B et A' est distinct de B', alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 2 cm.

On note A, B, C, D et E les points d'affixes respectives

$$z = 2i,\ z_B = 2,\ z_C = 4 + 6i,\ z_D = -1 + i \text{ et } z_E = -3 + 3i.$$

1. Placer les points sur une figure qui sera complétée au fur et àmesure des questions.

2. Déterminer la nature du triangle ABC.

3. Soit f la similitude plane directe telle que $f(A) = D$ et $f(B) = A$.

a. Donner l'écriture complexe de f.

b. Déterminer l'angle, le rapport et le centre Ω de cette similitude.

c. Montrer que le triangle DAE est l'image du triangle ABC par la similitude f.

d. En déduire la nature du triangle DAE.

4. On désigne par (C_1) le cercIe de diamètre $[AB]$ et par (C_2) le cercle de diamètre $[AD]$.

On note M le second point d'intersection du cercle (C_1) et de la droite (BC), et N le second point d'intersection du cercle (C_2) et de la droite (AB).

a. Déterminer l'image de M par la similitude f.

b. En déduire la nature du triangle ΩMN.

c. Montrer que $MB \times NE = MC \times NA$.

4. Exercice 3

5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points : $A(1 ; -1 ; 3)$, $B(0 ; 3 ; 1)$, $C(6 ; -7 ; -1)$, $D(2 ; 1 ; 3)$ et $E(4 ; -6 ; 2)$.

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...

1. a. Montrer que le barycentre du système $\{(A, 2), (B, -1), (C, 1)\}$ est le point E.

b. En déduire l'ensemble Γ des points M de l'espace tels que $\left\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 2\sqrt{21}$.

2. a. Montrer que les points A, B et D définissent un plan.

b. Montrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (ABD).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABD).

3. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

b. Déterminer les coordonnées du point F intersection de la droite (EC) et du plan (ABD).

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Montrer que le plan (ABD) et l'ensemble Γ, déterminé à la question 1., sont sécants. Préciser les éléments caractéristiques de cette intersection.

5. Exercice 4

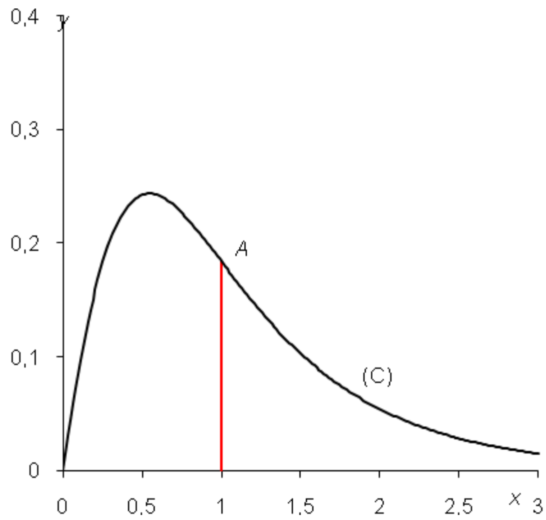
6 points

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

La courbe (C), donnée ci-contre, est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, de fonction dérivée f' continue sur $[0\,;\,+\infty[$.

La courbe (C) passe par les points O et $A\left(1, \dfrac{1}{2e}\right)$; et, sur $[0\,;\,1]$, est au dessus du segment $[OA]$.



1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,dx = \frac{1}{2e}$.

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \geq \frac{1}{4e}$.

Partie B

On sait désormais que la fonction f considérée dans la partie A est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{xe^{-x}}{x^2+1}$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2. On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.

Établir que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

3. a. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.

b. En déduire les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \displaystyle\int_n^{2n} f(x)\,dx$.

a. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $0 \leq \dfrac{x}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{2}$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}\left(e^{-n} - e^{-2n}\right)$.

c. En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...