Nouvelle–Calédonie

1. Exercice 1

4 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ direct d'unité graphique 1 cm. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 3+4i$. Soit C et D les points d'affixes respectives $z_C = 2\sqrt{3}+i\left(-2-\sqrt{3}\right)$ et $z_D = -2\sqrt{3}+i\left(-2+\sqrt{3}\right)$.

L' objet de l'exercice est de proposer une construction géométrique des points D et C.

1. a. Montrer que l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est le point D.

b. En déduire que les points B et D sont sur un cercle (C) de centre A dont on déterminera le rayon.

2. Soit F, l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$.

a. Montrer que l'affixe z_F du point F est $-2i$.

b. Montrer que le point F est le milieu du segment $[CD]$.

c. Montrer que $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle de $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}$. Déduire des questions précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment $[CD]$.

3. Proposer un programme de construction pour les points D et C à partir des points A, B et F et réaliser la figure.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

2. Exercice 2 (non spécialistes)

5 points

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points :

$$A(4\,;0\,;0),\ B(0\,;2\,;0),\ C(0\,;0\,;3) \text{ et } E\left(\frac{2}{3}\,;-\frac{2}{3}\,;\frac{1}{9}\right).$$

On se propose de déterminer de deux façons la distance δ_E du point E au plan (ABC).

RAPPEL : Soit (P) un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ où a, b, c et d sont des nombre réels avec, a, b et c non tous nuls et M un point de coordonnées $(x_M\,;y_M\,;z_M)$ la distance δ_M du point M au plan (P) est égale à

$$\frac{\left|ax_M + by_M + cz_M + d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

1. a. Montrer que les points A, B et C déterminent bien un plan.

b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\,;6\,;4)$. Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Montrer qu'une équation du plan (ABC) est : $3x+6y+4z-12=0$.

d. Déduire des questions précédentes la distance δ_E.

2. a. Montrer que la droite (D) de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = \frac{5}{9}+\frac{4}{3}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, est perpendiculaire au plan (ABC) et passe par le point E.

b. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal G du point E sur le plan (ABC).

c. Retrouver à partir des coordonnées des points E et G la distance δ_E.

3. Exercice 3

5 points

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.

La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$. Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$. Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

• A_n l'évènement : « la n-ième cible est atteinte ».

• $\overline{A_n}$ l'évènement : « la n-ième cible n'est pas atteinte.

• a_n la probabilité de l'évènement A_n

• b_n la probabilité de l'évènement $\overline{A_n}$.

1. Donner a_1 et b_1. Calculer a_2 et b_2. On pourra utiliser un arbre pondéré.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$: $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$ puis : $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$.

3. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul, par $U_n = a_n - \frac{2}{3}$.

a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique. On précisera la raison et le premier terme U_1.

b. En déduire l'expression de U_n en fonction de n, puis l'expression de a_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (a_n).

d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $a_n > 0{,}6665$.

4. Exercice 4

6 points

Soit f une fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = (1+x)e^{-x}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1. a. Étudier le signe de $f(x)$ sur P.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur P. Calculer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$.

En déduire les variations de la fonction f sur P.

d. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle [−2 ; 5].

2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $I_n = \int_{-1}^{n} f(x)\,dx$.

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n > 0$.

b. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

3. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tous réels a et b :

$$\int_a^b f(x)\,dx = (-2-b)e^{-b} + (2+a)e^{-a}.$$

b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

c. Déterminer : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

d. Donner une interprétation graphique de cette limite.

4. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx = e$. Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?