

## Nouvelle Calédonie

---

### 1. Exercice 1

---

5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{P}$  par :  $f(x) = x^2 e^{-x}$ . On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .

- Déterminer les limites de la fonction  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
- Calculer  $f'(x)$  et déterminer le tableau de variations de  $f$ .
- En déduire le signe de  $f$  sur  $\mathbb{P}$ .

2. Pour tout nombre réel  $a$ , on considère l'intégrale :  $I(a) = \int_0^a f(x) dx$ .

- Donner selon les valeurs de  $a$  le signe de  $I(a)$ .
- À l'aide d'une double intégration par parties montrer que pour tout nombre réel  $a$  :

$$I(a) = 2 - 2e^{-a} \left( 1 + a + \frac{1}{2}a^2 \right).$$

c. En déduire pour tout nombre réel  $a$  :  $\frac{1}{2}e^a I(a) = e^a - \left( 1 + a + \frac{1}{2}a^2 \right)$ .

3. Soient  $g$  et  $h$  les fonctions définies sur  $\mathbb{P}$  par  $g(x) = e^x$  et  $h(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ .

On note  $C$  la courbe représentative de  $g$  et  $P$  celle de  $h$ .

- Montrer que les courbes  $C$  et  $P$  ont la même tangente au point d'abscisse 0.
- Déduire des questions précédentes la position relative des courbes  $C$  et  $P$ .

### 2. Exercice 2 (non spécialistes)

---

5 points

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongoir.

On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.

Si un manchot choisit le plongoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.

Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on considère l'évènement :

\*  $T_n$  : « le manchot utilise le toboggan lors de son  $n$ -ième passage. »

\*  $P_n$  : « le manchot utilise le plongoir lors de son  $n$ -ième passage. »

On considère alors la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n > 1$  par :  $u_n = p(T_n)$  où  $p(T_n)$  est la probabilité de l'évènement  $T_n$ .

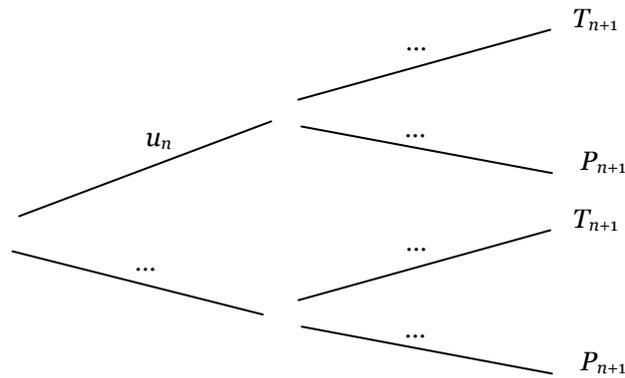
- Donner les valeurs des probabilités  $p(T_1)$ ,  $p(P_1)$  et des probabilités conditionnelles  $p_{P_1}(T_2)$ ,  $p_{T_1}(T_2)$ .
- Montrer que  $p(T_2) = \frac{1}{4}$ .
- Recopier et compléter l'arbre suivant.
- Démontrer que pour tout entier  $n > 1$ ,  $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$ .
- À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite  $(u_n)$ .

2. On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n > 1$  par :  $v_n = u_n - \frac{2}{9}$ .

a. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{10}$ . Préciser son premier terme.

b. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ . En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

c. Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ . Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en 1. e. ?



### 3. Exercice 2 (spécialistes)

5 points Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

1. On considère l'équation notée  $(E)$  :  $3x + 7y = 10^{2n}$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

a. Déterminer un couple  $(u ; v)$  d'entiers relatifs tels que  $3u + 7v = 1$ .

En déduire une solution particulière  $(x_0 ; y_0)$  de l'équation  $(E)$ .

b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs  $(x ; y)$  solutions de  $(E)$ .

2. On considère l'équation notée  $(G)$   $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

a. Montrer que  $100 \equiv 2 \pmod{7}$ . Démontrer que si  $(x ; y)$  est solution de  $(G)$  alors  $3x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$ .

b. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de $x$ par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7							

c. Démontrer que  $2^n$  est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.

En déduire que l'équation  $(G)$  n'admet pas de solution.

### 4. Exercice 3

5 points

L'espace est rapporté au repère orthonormal  $(A ; \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$ .

On considère le cube représenté ci-contre.

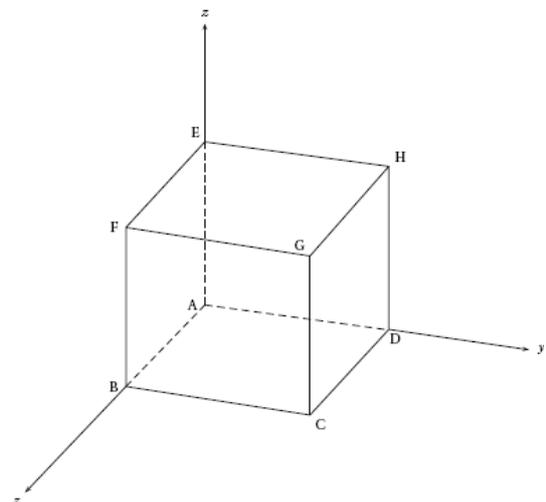
On désigne par  $I, J$  et  $K$  les milieux respectifs des segments  $[BC], [BF]$  et  $[HF]$ .

1. Déterminer les coordonnées des points  $I, J$  et  $K$ .

2. Démontrer que le vecteur  $\vec{n}(2 ; 1 ; 1)$  est orthogonal à  $\overline{IK}$  et à  $\overline{IJ}$ .

En déduire qu'une équation du plan  $(IJK)$  est :  $4x + 2y + 2z - 5 = 0$ .

3. a. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite  $(CD)$ .



- b. En déduire que le point d'intersection  $R$  du plan  $(IJK)$  et de la droite  $(CD)$  est le point de coordonnées  $\left(\frac{3}{4}; 1; 0\right)$ .
- c. Placer le point  $R$  sur la figure.
4. Tracer sur la figure la section du cube par le plan  $(IJK)$ . On peut répondre à cette question sans avoir traité les précédentes.
5. a. Montrer que la distance du point  $G$  au plan  $(IJK)$  est  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .
- b. Soit  $S$  la sphère de centre  $G$  passant par  $F$ . Justifier que la sphère  $S$  et le plan  $(IJK)$  sont sécants. Déterminer le rayon de leur intersection.

#### 5. Exercice 4

5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 2 cm. On considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ,  $z_B = 2i$ .

1. a. Écrire  $z_A$  et  $z_B$  sous forme exponentielle.
- b. Placer les points  $A$  et  $B$  sur une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.
- c. Déterminer la nature du triangle  $OAB$ .
2. On note  $r$  la rotation de centre  $O$  qui transforme  $A$  en  $B$ . Pour tout point  $M$  d'affixe  $z$ , on note  $M'$  l'image de  $M$  par  $r$  et  $z'$  l'affixe du point  $M'$ .
  - a. Calculer un argument du quotient  $\frac{z_A}{z_B}$ . Interpréter géométriquement ce résultat.
  - b. En déduire l'écriture complexe de la rotation  $r$ .
3. Soient  $\Gamma$  le cercle de centre  $A$  passant par  $O$  et  $\Gamma'$  le cercle de centre  $B$  passant par  $O$ . Soit  $C$  le deuxième point d'intersection de  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  (autre que  $O$ ). On note  $z_C$  son affixe.
  - a. Justifier que le cercle  $\Gamma'$  est l'image du cercle  $\Gamma$  par la rotation  $r$ .
  - b. Calculer l'affixe  $z_I$  du milieu  $I$  de  $[AB]$ .
  - c. Déterminer la nature du quadrilatère  $OACB$ .
  - d. En déduire que  $I$  est le milieu de  $[OC]$  puis montrer que l'affixe de  $C$  est :  $z_C = 1 + (2 + \sqrt{3})i$ .
4. Soit  $D$  le point d'affixe  $z_D = 2i\sqrt{3}$ .
  - a. Justifier que le point  $D$  appartient au cercle  $\Gamma$ . Placer  $D$  sur la figure.
  - b. Placer  $D'$  image de  $D$  par la rotation  $r$  définie à la question 2. On note  $z_{D'}$  l'affixe de  $D'$ .  
Montrer que  $z_{D'} = -\sqrt{3} + 3i$ .
5. Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{DC}$  et  $\overrightarrow{DD'}$  sont colinéaires. Que peut-on en déduire ?