

**Antilles Guyane****1. Exercice 1 (4 points)****VRAI OU FAUX**

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

**PARTIE A**

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $u_n = (-1)^n$ .

1. La suite  $(u_n)$  est bornée.
2. La suite  $(u_n)$  converge.
3. La suite de terme général  $\frac{u_n}{n}$  converge.
4. Toute suite  $(v_n)$  à termes strictement positifs et décroissante converge vers 0.

**PARTIE B**

1. Si  $A$  et  $B$  sont deux événements indépendants avec  $p(B) \neq 0$  et  $p(B) \neq 1$ , alors  $p(A \cap B) = p_B(A)$ .
2. Si  $X$  est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $[0; 1]$ , alors  $p(X \in [0,1; 0,6]) = 0,6$ .
3. Si  $X$  est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres 100 et  $\frac{1}{3}$ , alors

$$p(X > 1) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{100}.$$

**2. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)**

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(1; -1; 4)$ ,  $B(7; -1; -2)$  et  $C(1; 5; -2)$ .

1. a. Calculer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{BC}$ .
- b. Montrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral.
- c. Montrer que le vecteur  $\vec{n}(1; 1; 1)$  est un vecteur normal au plan  $(ABC)$ .
- d. En déduire que  $x + y + z - 4 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .

2. Soit  $(D)$  la droite de représentation paramétrique 
$$\begin{cases} x = -2t \\ y = -2t - 2 \\ z = -2t - 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- a. Montrer que la droite  $(D)$  est perpendiculaire au plan  $(ABC)$ .
  - b. Montrer que les coordonnées du point  $G$ , intersection de la droite  $(D)$  et du plan  $(ABC)$  sont  $(3; 1; 0)$ .
  - c. Montrer que  $G$  est l'isobarycentre des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
3. Soit  $(S)$  la sphère de centre  $G$  passant par  $A$ .
    - a. Donner une équation cartésienne de la sphère  $(S)$ .
    - b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection  $E$  et  $F$ , de la droite  $(D)$  et de la sphère  $(S)$ .

**3. Exercice 2 (5 points, spécialistes)**

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère la surface  $S_1$  d'équation  $z = x^2 + y^2$ , et la surface  $S_2$  d'équation  $z = xy + 2x$ .

**PARTIE A**

On note  $P$  le plan d'équation  $x = 2$ ,  $E_1$  l'intersection de la surface  $S_1$  et du plan  $P$  et  $E_2$  l'intersection de la surface  $S_2$  et du plan  $P$ .

1. a. Déterminer la nature de l'ensemble  $E_1$ .

b. Déterminer la nature de l'ensemble  $E_2$ .

2. a. Représenter les ensembles  $E_1$  et  $E_2$  dans un repère  $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  du plan  $P$  où  $A$  est le point de coordonnées  $(2; 0; 0)$ .

b. Dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  donner les coordonnées des points d'intersection  $B$  et  $C$  des ensembles  $E_1$  et  $E_2$ .

#### PARTIE B

On pourra utiliser sans démonstration la propriété suivante : « soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  des entiers avec  $a$  premier. Si  $a$  divise  $bc$  alors  $a$  divise  $b$  ou  $a$  divise  $c$ . »

L'objectif de cette partie est de déterminer les points d'intersection  $M(x; y; z)$  des surfaces  $S_1$  et  $S_2$  où  $y$  et  $z$  sont des entiers relatifs et  $x$  un nombre premier. On considère un tel point  $M(x; y; z)$ .

1. a. Montrer que  $y(y - x) = x(z - x)$ .

b. En déduire que le nombre premier  $x$  divise  $y$ .

2. On pose  $y = kx$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

a. Montrer que  $x$  divise 2, puis que  $x = 2$ .

b. En déduire les valeurs possibles de  $k$ .

3. Déterminer les coordonnées possibles de  $M$  et comparer les résultats avec ceux de la PARTIE A, question 2. b.

#### 4. Exercice 3 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 1 cm.

Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.

1. Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $z_A = -11 + 4i$ ,  $z_B = -3 - 4i$  et  $z_C = 5 + 4i$ .

2. Calculer le module et un argument du quotient  $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$  et en déduire la nature du triangle  $ABC$ .

3. Soit  $E$  l'image du point  $C$  par la rotation  $R$  de centre  $B$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ . Montrer que l'affixe de  $E$  vérifie  $z_E = -3 + (8\sqrt{2} - 4)i$ . Placer le point  $E$ .

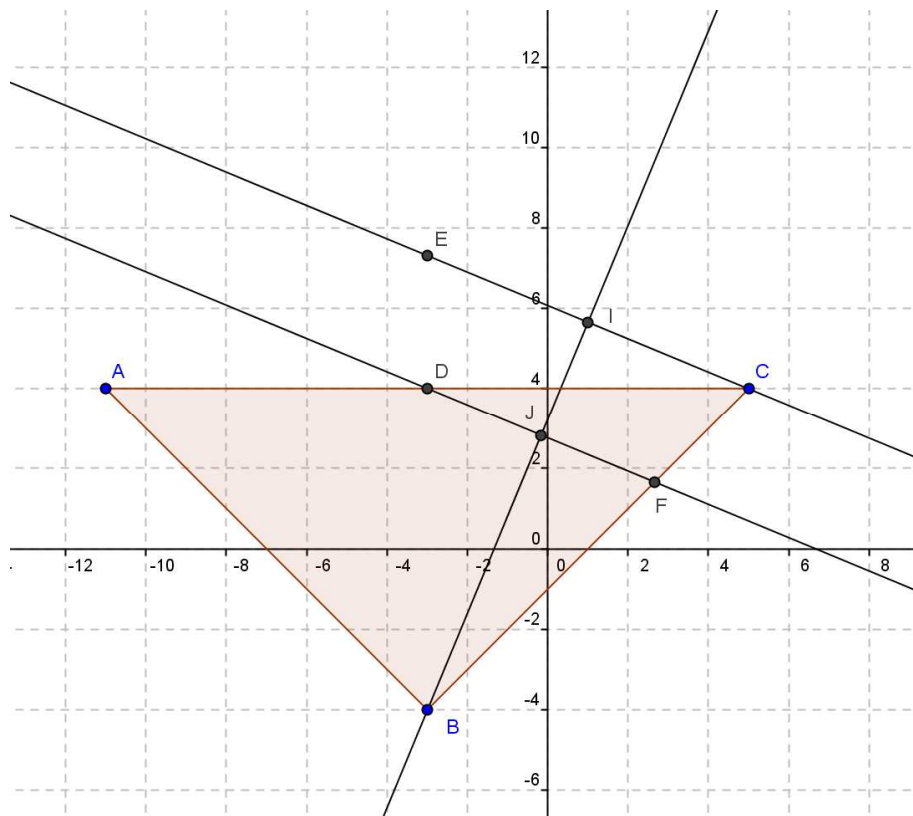
4. Soit  $D$  l'image du point  $E$  par l'homothétie  $h$  de centre  $B$  et de rapport  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Montrer que  $D$  est le centre du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ . Placer le point  $D$ .

5. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit  $(\Delta)$  la droite parallèle à la droite  $(EC)$  passant par le point  $D$ . On note  $F$  le point d'intersection de la droite  $(\Delta)$  et de la droite  $(BC)$ ,  $I$  le milieu du segment  $[EC]$  et  $J$  le milieu du segment  $[DF]$ .

Montrer que  $B$ ,  $I$  et  $J$  sont alignés.

#### Correction



1.  $z_A = -11 + 4i$ ,  $z_B = -3 - 4i$  et  $z_C = 5 + 4i$ .

2.  $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-11 + 4i + 3 + 4i}{5 + 4i + 3 + 4i} = \frac{-8 + 8i}{8 + 8i} = \frac{-1 + i}{1 + i} = \frac{(-1 + i)(-1 - i)}{1 + 1} = \frac{2i}{2} = i$  donc  $ABC$  est isocèle

$\frac{|z_A - z_B|}{|z_C - z_B|} = \frac{AB}{CB} = |i| = 1$  et rectangle  $(\overline{BC}, \overline{BA}) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$ .

3.

$z_E - z_B = e^{i\frac{\pi}{4}}(z_C - z_B) \Leftrightarrow z_E = -3 - 4i + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(8 + 8i) = -3 - 4i + 4\sqrt{2}(1 + i)(1 + i) = -3 + (8\sqrt{2} - 4)i$ .

4.  $D$  est sur  $[AC]$  car la multiplication de  $BE = BC$  par  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  redonne la demi-hypoténuse de  $[AC]$ .  $D$  est au milieu de  $[AC]$  car le triangle  $BDC$  est isocèle rectangle également ; c'est donc le centre du cercle circonscrit à  $ABC$ .

5. Thalès donne la réponse...

#### 5. Exercice 4 (6 points)

Soit  $f$  la fonction définie pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $]0 ; 1]$  par :  $f(x) = 1 + x \ln x$ .

On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; 1]$ .

$C$  est la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

$T$  est la droite d'équation  $y = x$ .

La courbe  $C$  et la droite  $T$  sont représentées sur le schéma ci-dessous.

1. a. Justifier que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

b. En utilisant le signe de  $x \ln x$  sur  $]0 ; 1]$ , montrer que, pour tout nombre réel  $x \in ]0 ; 1]$ , on a  $f(x) \leq 1$ .

2. a. Calculer  $f'(x)$  pour tout nombre réel  $x \in ]0 ; 1]$ .

b. Vérifier que la droite T est tangente à la courbe C au point d'abscisse 1.

3. On note  $g$  la fonction définie pour tout nombre réel  $x \in ]0 ; 1]$  par  $g(x) = 1 + x \ln x - x$ .

a. Étudier les variations de  $g$  sur l'intervalle  $]0 ; 1]$  et dresser le tableau de variation de  $g$ . On ne cherchera pas la limite de  $g$  en 0.

b. En déduire les positions relatives de la courbe C et de la droite T.

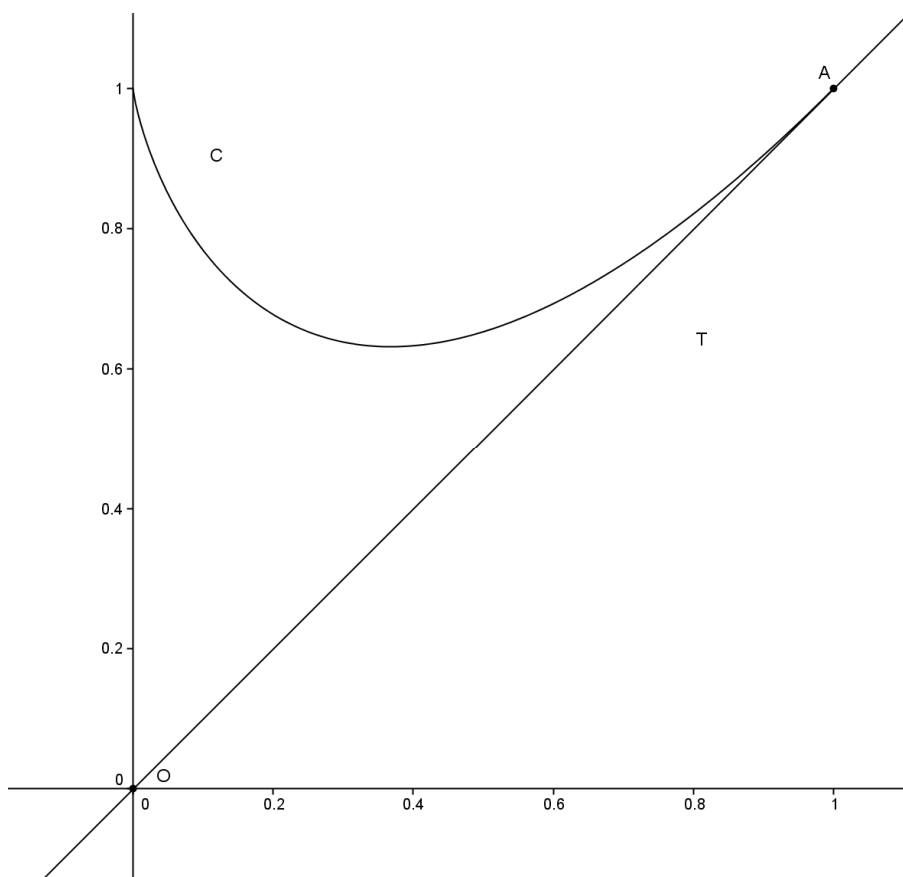
4. Soit  $\alpha$  un nombre réel tel que  $0 < \alpha < 1$ . On pose  $I(\alpha) = \int_{\alpha}^1 [1 - f(x)] dx$ .

a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $I(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} \ln \alpha + \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4}$ .

b. Déterminer  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} I(\alpha)$ .

c. Interpréter graphiquement le résultat précédent.

d. À l'aide des résultats précédents, déterminer, en unités d'aire, l'aire du domaine compris entre la courbe C, la droite T et l'axe des ordonnées.



### **Correction**

$$f(x) = 1 + x \ln x.$$

1. a. Quand  $x$  tend vers 0,  $x \ln x$  tend également vers 0 et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

b. Sur  $]0; 1]$   $x \ln x$  est négatif car  $\ln x$  l'est ; on a donc  $1 + x \ln x \leq 1$ .

2. a.  $f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1$ .

b. Tangente en 1 :  $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 1(x-1) + 1 = x$ .

3. On note  $g$  la fonction définie pour tout nombre réel  $x \in ]0; 1]$  par  $g(x) = 1 + x \ln x - x$ .

a.  $g'(x) = 0 + \ln x + x \frac{1}{x} - 1 = \ln x$ . Donc  $g$  est décroissante sur  $]0; 1]$  et comme  $g(1) = 1 + 0 + 1 = 0$ ,  $g(x) \geq 0$ .

b. Le signe de  $f(x) - x = g(x)$  est positif donc C est au-dessus de T.

4. a.  $I(\alpha) = \int_{\alpha}^1 x \ln x dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_{\alpha}^1 - \int_{\alpha}^1 \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \alpha^2 \ln \alpha - \frac{1}{4} \alpha^2 + \frac{1}{4}$ .

b.  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} I(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2} \alpha^2 \ln \alpha - \frac{1}{4} \alpha^2 + \frac{1}{4} = 0 - 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ .

c. Aire comprise entre la courbe C, la droite  $y = 1$ , la droite  $x = 1$  et l'axe vertical.

d. L'aire en question est l'aire du triangle - l'aire précédente, soit  $1/2 - 1/4 = 1/4$ .