Amérique du Nord

Exercice 1

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Les points *A*, *B* et *C* ont pour coordonnées respectives *A*(1, −2, 4), *B*(−2, −6, 5), *C*(−4, 0, −3).

1.

a. Les points *A*, *B* et *C* ne sont pas alignés :

On a $\overrightarrow{AB}(-3\,;-4\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-5\,;2\,;-7)$;

Ces 2 vecteurs n'ayant manifestement pas leurs coordonnées proportionnelles, ne sont pas colinéaire ;

Par conséquent, les points A, B et C ne sont pas alignés ; CQFD !

b. Le vecteur $\vec{n}(1\,;-1\,;-1)$ est un vecteur normal au plan (*ABC*) :

→ $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=1\times(-3)+(-1)\times(-4)+(-1)\times1=-3+4-1=0 \Leftrightarrow \vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$;

→ $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=1\times(-5)+(-1)\times2+(-1)\times(-7)=-5-2+7=0 \Leftrightarrow \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$;

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal à 2 vecteurs directeurs - puisque non colinéaires - du plan (ABC) ;

En conséquence, c'est un vecteur normal au plan (ABC) ; CQFD !

c. Une équation du plan (*ABC*) :

→ $\vec{n}(1\,;-1\,;-1)$ étant un vecteur normal au plan (ABC) , celui-ci admet une équation cartésienne du type : $x-y-z+d=0$;

→ Comme *A* ⊠ (ABC), $x_A-y_A-z_A+d=0 \Leftrightarrow 1-(-2)-4+d=0 \Leftrightarrow d=1$;

Une équation du plan (ABC) est donc : $x-y-z+1=0$.

2.

a. Une représentation paramétrique de la droite passant par le point *O* et orthogonale au plan (*ABC*) :

Soit (D) cette droite ;

(D) admet tout vecteur normal à (ABC) comme vecteur directeur, donc $\vec{n}(1\,;-1\,;-1)$;

$$M(x;y;z)\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=k\vec{n}\Leftrightarrow\begin{cases}x-x_0=k\times1\\y-y_0=k\times(-1)\\z-z_0=k\times(-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=k\\y=-k\\z=-k\end{cases};$$

Une représentation paramétrique de cette droite est donc : $\begin{cases}x=k\\y=-k\\z=-k\end{cases}$ où *k* ⊠ ☑.

b. Les coordonnées du point *O*', projeté orthogonal du point *O* sur le plan (*ABC*) :

Le projeté *O*' de *O* sur (*ABC*) est le point d'intersection de (D° avec (ABC) ;

Ses coordonnées sont donc solution du système :

$$\begin{cases}\begin{cases}x=k\\y=-k\\z=-k\end{cases}\\x-y-z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{cases}x=k\\y=-k\\z=-k\end{cases}\\k-(-k)-(-k)+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-\dfrac{1}{3}\\\begin{cases}x=-\dfrac{1}{3}\\y=\dfrac{1}{3}\\z=\dfrac{1}{3}\end{cases}\end{cases};$$

Donc $O'\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

3. On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC). Soit t le réel tel que $\overrightarrow{BH}=t\overrightarrow{BC}$.

   a. $t=\dfrac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}$:

   → Comme H ⊠ (BC), il existe effectivement un réel t tel que $\overrightarrow{BH}=t\overrightarrow{BC}$; De là :

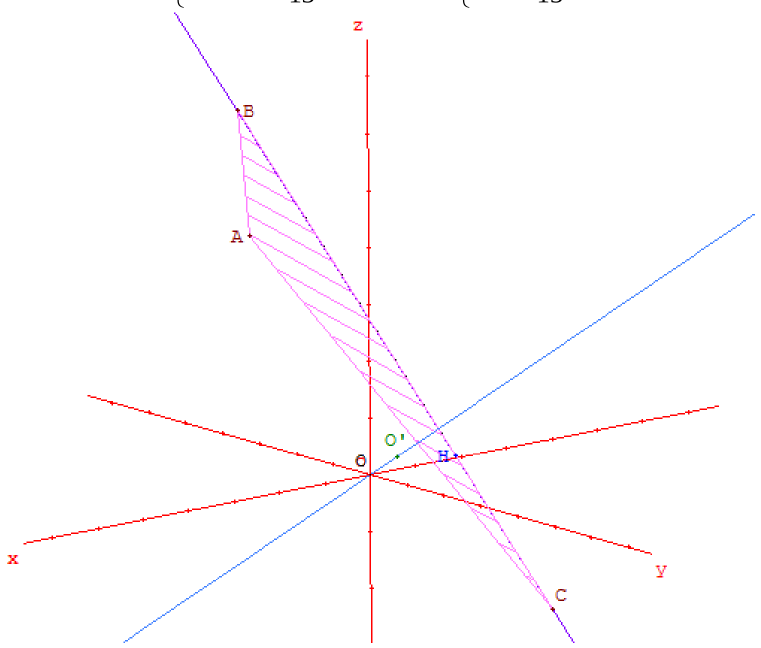
   → $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}=\left(t\overrightarrow{BC}.\right)\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OH}\right).\overrightarrow{BC}=t\overrightarrow{BC}^2\Leftrightarrow\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}+\cancel{\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{BC}}=t\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\Leftrightarrow t=\dfrac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}$; CQFD !

   b. Le réel t et les coordonnées du point H :

   → Or $\overrightarrow{BO}(2;6;-5)$ et $\overrightarrow{BC}(-2;6;-8)$ donc $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}=72$ et $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2=104$;

   Et par conséquent, $t=\dfrac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}=\dfrac{72}{104}=\dfrac{9}{13}$;

   → Ainsi, $\overrightarrow{BH}=\frac{9}{13}\overrightarrow{BC}$ d'où $\begin{cases}x-(-2)=\frac{9}{13}\times(-2)\\ y-(-6)=\frac{9}{13}\times 6\\ z-5=\frac{9}{13}\times(-8)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{44}{13}\\ y=-\frac{24}{13}\\ z=-\frac{7}{13}\end{cases}$; Donc $H\left(-\frac{44}{13};-\frac{24}{13};-\frac{7}{13}\right)$.



Exercice 2

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.

20 % des boules portent le numéro 1 et sont rouges.

Les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10 % sont rouges et les autres sont vertes.

Présentation des données sous forme d'un tableau à double entrée :

	n°1	n°2	TOTAL
rouges	20%	8%	28%
vertes	0%	72%	72%
TOTAL	20%	80%	100%

1. On tire une boule au hasard. Probabilité qu'elle soit rouge :

   On est en face d'une situation d'équiprobabilité ; il vient alors immédiatement que p(R) = 0,28.

2. On a tiré une boule au hasard. Elle est rouge.

   Probabilité qu'elle porte le numéro 2 : $p_R(2) = \dfrac{8}{28} = \dfrac{2}{7}$.

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage la boule est remise dans l'urne).

   a. Probabilité, en fonction de n, d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages :

      On est donc en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et $p = p(R \cap 1) = 0{,}2$.

      Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges portant le numéro 1 au cours des n tirages ; X suit donc la loi binomiale $B(n\ ;\ 0{,}2)$.

      Soit E l'événement : « obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages » ;

      Alors $p(E) = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (1 - 0{,}2)^n = 1 - 0{,}8^n$.

   b. L'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à 0,99 :

      Donc $p(E) \geq 0{,}99 \;\partial\; 1 - 0{,}8^n \geq 0{,}99 \;\partial\; 0{,}01 \geq 0{,}8^n$

      $\partial\; \ln 0{,}01 \geq \ln(0{,}8^n) \;\partial\; \ln 0{,}01 \geq n \ln 0{,}8 \;\partial\; \ln 0{,}01/\ln 0{,}8 \leq n$

      $\partial\; n \geq 21$.

Exercice 3 non spécialistes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A d'affixe i, B d'affixe $-2i$ et D d'affixe 1.

On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct.

Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z ($z \neq i$) associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \dfrac{2z - i}{iz + 1}$.

1. Le point E a pour affixe $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i)$:

   Puisque le triangle ADE soit équilatéral direct, E est l'image de D par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$;

   Or $r_{A;\frac{\pi}{3}}$ a pour écriture complexe :

   $$z' - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_A) \Leftrightarrow z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - i) + i \Leftrightarrow z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right);$$

   Et puisque $E = r_{A;\frac{\pi}{3}}(D)$, $z_E = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z_D + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow z_E = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 1 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right)$

   $$\Leftrightarrow z_E = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i) \text{ ; CQFD !}$$

2. L'affixe - sous forme algébrique - du point D' associé au point D par l'application f :

   $$z_{D'} = \frac{2z_D - i}{iz_D + 1} = \frac{2 \times 1 - i}{i \times 1 + 1} = \frac{(2 - i)(1 - i)}{1^2 + 1^2} = \frac{2 - 2i - i - 1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i.$$

3.

a. Pour tout nombre complexe z différent de i, $(z'+2i)(z-i)=1$:

$$(z'+2i)(z-i)=\left(\frac{2z-i}{iz+1}+2i\right)(z-i)=\left(\frac{2z-i+2i(iz+1)}{iz+1}\right)(z-i)$$

$$=\left(\frac{\cancel{2z}-i-\cancel{2z}+2i}{i\cancel{(z-i)}}\right)\cancel{(z-i)}=\frac{i}{i}=1 \text{ ; CQFD !}$$

b. pour tout point M d'affixe z ($z \neq i$) : $BM'\times AM=1$ et $\left(\vec{u},\overrightarrow{BM'}\right)=-\left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right)+k\times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$:

Puisque $(z'+2i)(z-i)=1$, par passage aux modules et aux arguments, il vient :

→ $|(z'+2i)(z-i)|=|1| \Leftrightarrow |z'-(-2i)|\times|z-i|=1 \Leftrightarrow |z'-z_B|\times|z-z_A|=1 \Leftrightarrow BM'\times AM=1$;

→ $\arg((z'+2i)(z-i))=\arg(1)+2k\pi \Leftrightarrow \arg(z'+2i)+\arg(z-i)=0+2k\pi$

$\Leftrightarrow \arg(z'-z_B)+\arg(z-z_A)=2k\pi \Leftrightarrow \left(\vec{u};\overrightarrow{BM'}\right)+\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)=2k\pi$

$\Leftrightarrow \left(\vec{u};\overrightarrow{BM'}\right)=-\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)+2k\pi$

4.

a. Les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$:

→ $AD=|z_D-z_A|=|1-i|=\sqrt{2}$ donc $D \in$ (C) ;

→ $AE = AD$ car ADE est équilatéral (cf. 1.) donc $E \in$ (C) ;

b. Construction du point E' associé au point E par l'application f :

D'après le 3.b.,

→ $BD'\times AD=1 \Rightarrow BD'=\dfrac{1}{AD}$ et $BE'\times AE=1 \Rightarrow BE'=\dfrac{1}{AE}$ et comme $AD = AE$, $BE' = BD'$;

→ $\left(\vec{u};\overrightarrow{BE'}\right)=-\left(\vec{u};\overrightarrow{AE}\right)$;

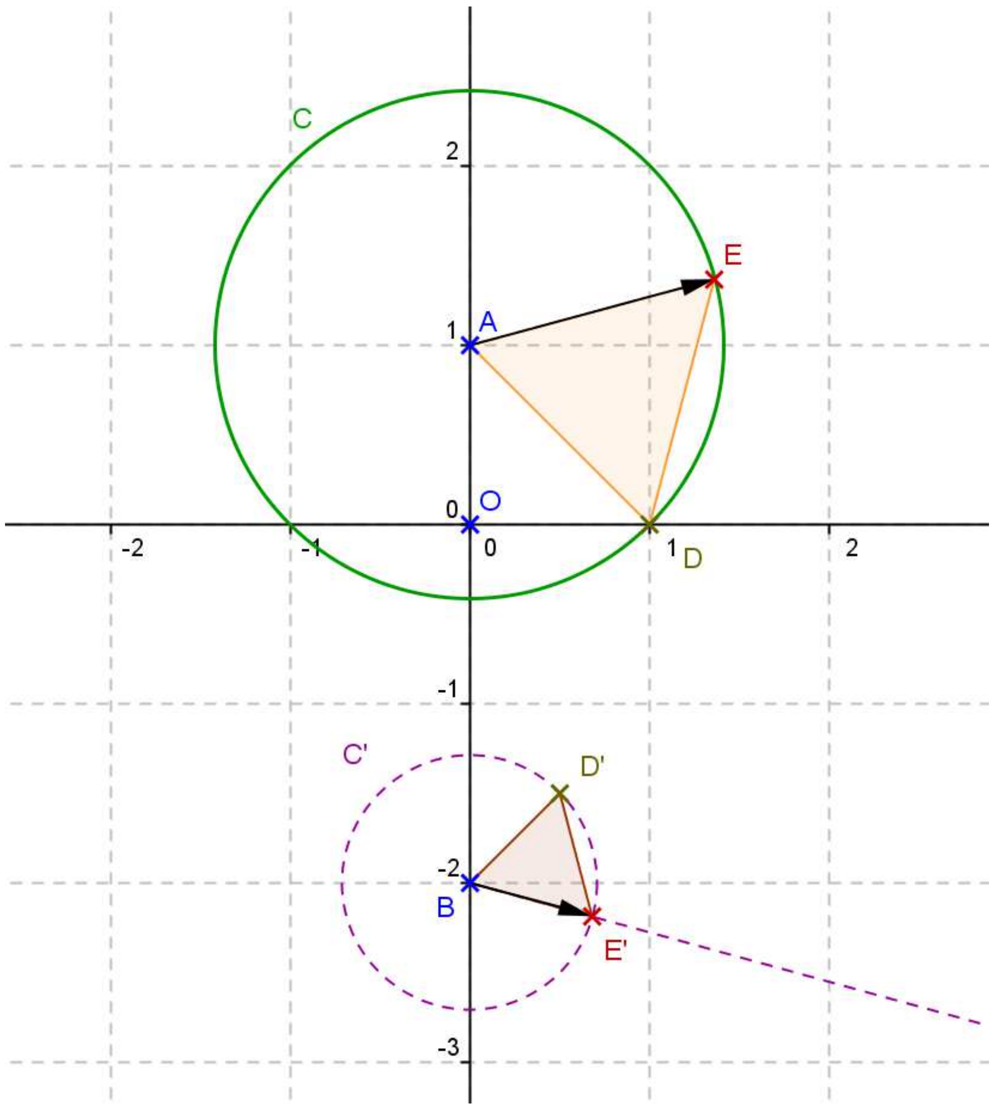
D'où la construction de E'.

5. La nature du triangle $BD'E'$:

- $BD' = BE'$ (cf. 4.b.) ;
- $\left(\overrightarrow{BD'};\overrightarrow{BE'}\right)=\left(\overrightarrow{BD'};\vec{u}\right)+\left(\vec{u};\overrightarrow{BE'}\right)=-\left(\vec{u};\overrightarrow{BD'}\right)+\left(\vec{u};\overrightarrow{BE'}\right)$

$$=\left(\vec{u};\overrightarrow{AD}\right)-\left(\vec{u};\overrightarrow{AE}\right)=\left(\overrightarrow{AE};\vec{u}\right)+\left(\vec{u};\overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{\pi}{3} ;$$

$BD'E'$ est donc équilatéral (indirect) .

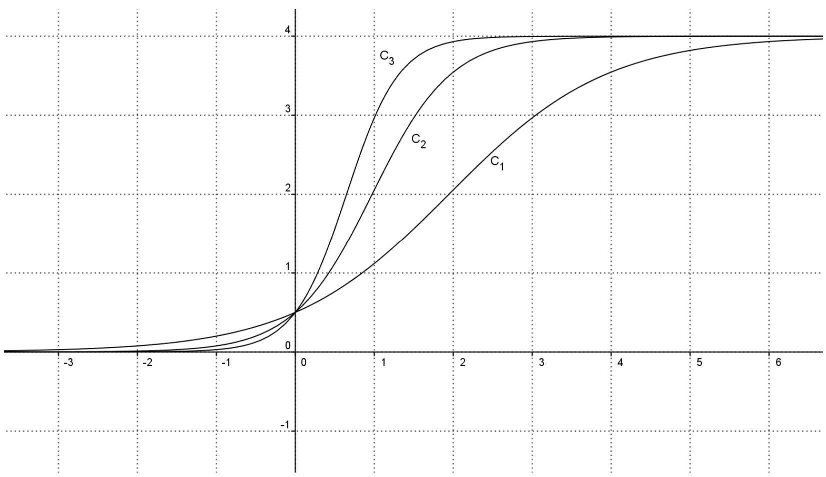


Exercice 4

À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur P par $f_n(x) = \dfrac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$.

On désigne par C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Les courbes C_1, C_2 et C_3 sont données ci-dessous.



Partie A : Etude de la fonction f_1 définie sur P par $f_1(x) = \dfrac{4e^x}{e^x + 7}$.

1. Pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{4}{1+7e^{-x}}$: $f_1(x) = \dfrac{4e^x}{e^x+7} = \dfrac{4\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(1+\dfrac{7}{e^x}\right)} = \dfrac{4}{1+7e^{-x}}$; CQFD !

2.

   a. La courbe C_1 admet deux asymptotes :

   → $\lim\limits_{x\to-\infty} 4e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x + 7 = 7$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4e^x}{e^x+7} = 0$;
   Donc, puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = 0$, C_1 admet la droite d'équation y = 0 (c'est-à-dire l'axe des abscisses) pour asymptote au voisinage de – .

   → $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+7e^{-x} = 1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$; Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{1+7e^{-x}} = 4$;
   Donc, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 4$, C_1 admet la droite d'équation y = 4 pour asymptote au voisinage de + .

   b. La fonction f_1 est strictement croissante sur P :

   → f_1 est dérivable sur P et $f_1'(x) = -\dfrac{4\times\left(-7e^{-x}\right)}{\left(1+7e^{-x}\right)^2} = \dfrac{28e^{-x}}{\left(1+7e^{-x}\right)^2}$;

   → Comme $e^X > 0$ pour tout réel X, $f_1'(x) > 0$ donc f_1 est strictement croissante sur P ; CQFD !

   c. Pour tout réel x, $0 < f_1(x) < 4$:

   Il vient successivement : $e^{-x} > 0 \Rightarrow 7e^{-x} > 0 \Rightarrow 1+7e^{-x} > 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{1+7e^{-x}} < 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{4}{1+7e^{-x}} < 4$

   Soit, $0 < f_1(x) = \dfrac{4}{1+7e^{-x}} < 4$; CQFD !

3.

   a. Le point I_1 de coordonnées (ln7, 2) est un centre de symétrie de la courbe C_1 :

$$\frac{f_1(\ln 7 - x) + f_1(\ln 7 + x)}{2} = \frac{\dfrac{4}{1+7e^{-(\ln 7 - x)}} + \dfrac{4}{1+7e^{-(\ln 7 + x)}}}{2} = \frac{\dfrac{4}{1+7e^{-\ln 7 + x}} + \dfrac{4}{1+7e^{-\ln 7 - x}}}{2} =$$

$$= \frac{2}{1+\cancel{7}e^{\ln\frac{1}{7}}\times e^x} + \frac{2}{1+\cancel{7}e^{\ln\frac{1}{7}}\times e^{-x}} = 2\times\frac{\left(1+e^{-x}\right)+\left(1+e^x\right)}{\left(1+e^{-x}\right)\left(1+e^x\right)} = 2\times\frac{2+\cancel{e^x+e^{-x}}}{\cancel{1+e^x+e^{-x}}+1} = 2 \ ;$$

   Puisque $\dfrac{f_1(\ln 7 - x) + f_1(\ln 7 + x)}{2} = 2$, le point I_1 (ln7, 2) est un centre de symétrie de la courbe C_1 ; CQFD !

   b. Une équation de la tangente T_1 à la courbe C_1 au point I_1 :

   On a $T_1 : y = f_1'(\ln 7)(x - \ln 7) + f_1(\ln 7)$;

   Or $f_1(\ln 7) = \dfrac{4}{1+7e^{-\ln 7}} = \dfrac{4}{1+7\times\frac{1}{7}} = 2$ et $f_1'(\ln 7) = \dfrac{28e^{-\ln 7}}{\left(1+7e^{-\ln 7}\right)^2} = \dfrac{28\times\frac{1}{7}}{\left(1+7\times\frac{1}{7}\right)^2} = \dfrac{4}{2^2} = 1$;

   D'où $T_1 : y = x - \ln 7 + 2$.

   c. Tracé de la droite T_1 : cf. graphique ci-après.

4.

a. Une primitive de la fonction f_1 sur P :

La fonction f_1 admet effectivement des primitives sur P car elle y est continue ;

Or $f_1(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+7}=4\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ si on pose $u(x)=e^x+7$;

En conséquence, une primitive $F1$ de $f1$ sur ☑ est définie par :

$$F_1(x)=4\times\ln|u(x)|=4\times\ln\left|e^x+7\right|=4\ln\left(e^x+7\right).$$

b. La valeur moyenne de f_1 sur l'intervalle [0, ln7].

$$\mu=\frac{1}{\ln 7-0}\times\int_0^{\ln 7} f_1(x)\,dx=\frac{1}{\ln 7}\times\left[F_1(x)\right]_0^{\ln 7}=\frac{1}{\ln 7}\times\left[F_1(\ln 7)-F_1(0)\right]$$

$$=\frac{1}{\ln 7}\times\left[4\ln\left(e^{\ln 7}+7\right)-4\ln\left(e^0+7\right)\right]=\frac{1}{\ln 7}\times\left[4\ln 14-4\ln 8\right]$$

$$=\frac{4\ln 2+4\ln 7-12\ln 2}{\ln 7}=4\frac{\ln 7-2\ln 2}{\ln 7}=4-8\frac{\ln 2}{\ln 7}\approx 1{,}15\,.$$

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n

1. Pour tout entier naturel n non nul le point $A\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe C_n :

$$f_n(0)=\frac{4e^{n\times 0}}{e^{n\times 0}+7}=\frac{4\times 1}{1+7}=\frac{1}{2}\ \text{ donc }\ A\left(0\,;\frac{1}{2}\right)\in C_n\ \text{ ; CQFD !}$$

2.

a. Pour tout $n\neq 0$ la courbe C_n et la droite d'équation $y=2$ ont un unique point d'intersection I_n :

$$f_n(x)=2\Leftrightarrow\frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}=2\Leftrightarrow 4e^{nx}=2e^{nx}+14\Leftrightarrow e^{nx}=7\Leftrightarrow nx=\ln 7\Leftrightarrow x=\frac{\ln 7}{n}\ ;$$

La courbe C_n et la droite d'équation $y=2$ ont donc bien un unique point d'intersection I_n dont l''abscisse est $\dfrac{\ln 7}{n}$.

b. Une équation de la tangente T_n à la courbe C_n au point I_n :

On a $T_n : y=f_n'\left(\dfrac{\ln 7}{n}\right)\left(x-\dfrac{\ln 7}{n}\right)+f_n\left(\dfrac{\ln 7}{n}\right)$;

Or $f_n\left(\dfrac{\ln 7}{n}\right)=2$ et , puisque

$$f_n'(x)=4\times\frac{ne^{nx}\times\left(e^{nx}+7\right)-e^{nx}\times ne^{nx}}{\left(e^{nx}+7\right)^2}=4\times\frac{ne^{nx}\left(\cancel{e^{nx}}+7-\cancel{e^{nx}}\right)}{\left(e^{nx}+7\right)^2}=\frac{28ne^{nx}}{\left(e^{nx}+7\right)^2}\,,$$

$$f_n'\left(\frac{\ln 7}{n}\right)=\frac{28ne^{\cancel{n}\times\frac{\ln 7}{\cancel{n}}}}{\left(e^{\cancel{n}\times\frac{\ln 7}{\cancel{n}}}+7\right)^2}=\frac{28\times 7n}{14^2}=n\ ;$$

D'où $T_n : y=nx-\ln 7+2$.

Remarque : les tangentes T_n à la courbe C_n au point I_n ont toutes la même ordonnée à l'origine, à savoir 2 – ln 7.

c. Tracer les droites T_2 et T_3 : cf. graphique ci-après.

3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \frac{n}{\ln 7}\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)\,dx$.

La suite (u_n) est constante :

$$u_n = \frac{n}{\ln 7}\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)\,dx = \frac{n}{\ln 7}\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} \frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}\,dx = \frac{\cancel{n}}{\ln 7}\times\left[\frac{4}{\cancel{n}}\ln\left(e^{nx}+7\right)\right]_0^{\frac{\ln 7}{n}}$$

$$= \frac{4}{\ln 7}\times\left[\ln\left(e^{\ln 7}+7\right)-\ln\left(e^{0}+7\right)\right] = \frac{4}{\ln 7}\times\left[\ln 14 - \ln 8\right] = 4-8\frac{\ln 2}{\ln 7} \approx 1{,}15.$$

La suite (u_n) est donc bien constante, à $4-8\frac{\ln 2}{\ln 7}$.

Remarque : Les valeurs moyennes des f_n sur les intervalles $[0, \ln 7/n]$, à savoir u_n, sont identiques donc.