Amérique du Nord

1. Exercice 1 (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $A(1, -2, 4)$, $B(-2, -6, 5)$, $C(-4, 0, -3)$.

1. a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(1\,;-1\,;-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Déterminer une équation du plan (ABC).

2. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point O et orthogonale au plan (ABC).

b. Déterminer les coordonnées du point O', projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

3. On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC).

Soit t le réel tel que $\overrightarrow{BH}=t\overrightarrow{BC}$.

a. Démontrer que $t=\dfrac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}$.

b. En déduire le réel t et les coordonnées du point H.

2. Exercice 2 (3 points)

Une urne contient des boules indiscernables au toucher. 20 % des boules portent le numéro 1 et sont rouges. Les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10 % sont rouges et les autres sont vertes.

1. On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

2. On a tiré une boule au hasard. Elle est rouge. Montrer que la probabilité qu'elle porte le numéro 2 est égale à $\dfrac{2}{7}$.

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage la boule est remise dans l'urne).

a. Exprimer en fonction de n la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages.

b. Déterminer l'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à 0,99,

3. Exercice 3 (5 points, non spécialistes)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On considère les points A d'affixe i, B d'affixe $-2i$ et D d'affixe 1.

On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct.

Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z ($z\neq i$) associe le point M' d'affixe z' définie par $z'=\dfrac{2z-i}{iz+1}$.

1. Démontrer que le point E a pour affixe $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)$.

2. Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D' associé au point D par l'application f.

3. a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de i, $(z'+2i)(z-i)=1$.

b. En déduire que pour tout point M d'affixe z ($z \neq i$) : $BM' \times AM = 1$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}\right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

4. a. Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

b. En utilisant les résultats de la question 3. b, placer le point E' associé au point E par l'application f. On laissera apparents les traits de construction.

5. Quelle est la nature du triangle $BD'E'$?

4. Exercice 3 (5 points, spécialistes)

Partie A

On cherche l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x ; y) solutions de l'équation (E) : $16x - 3y = 4$.

1. Vérifier que le couple (1 ; 4) est une solution particulière de (E).
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

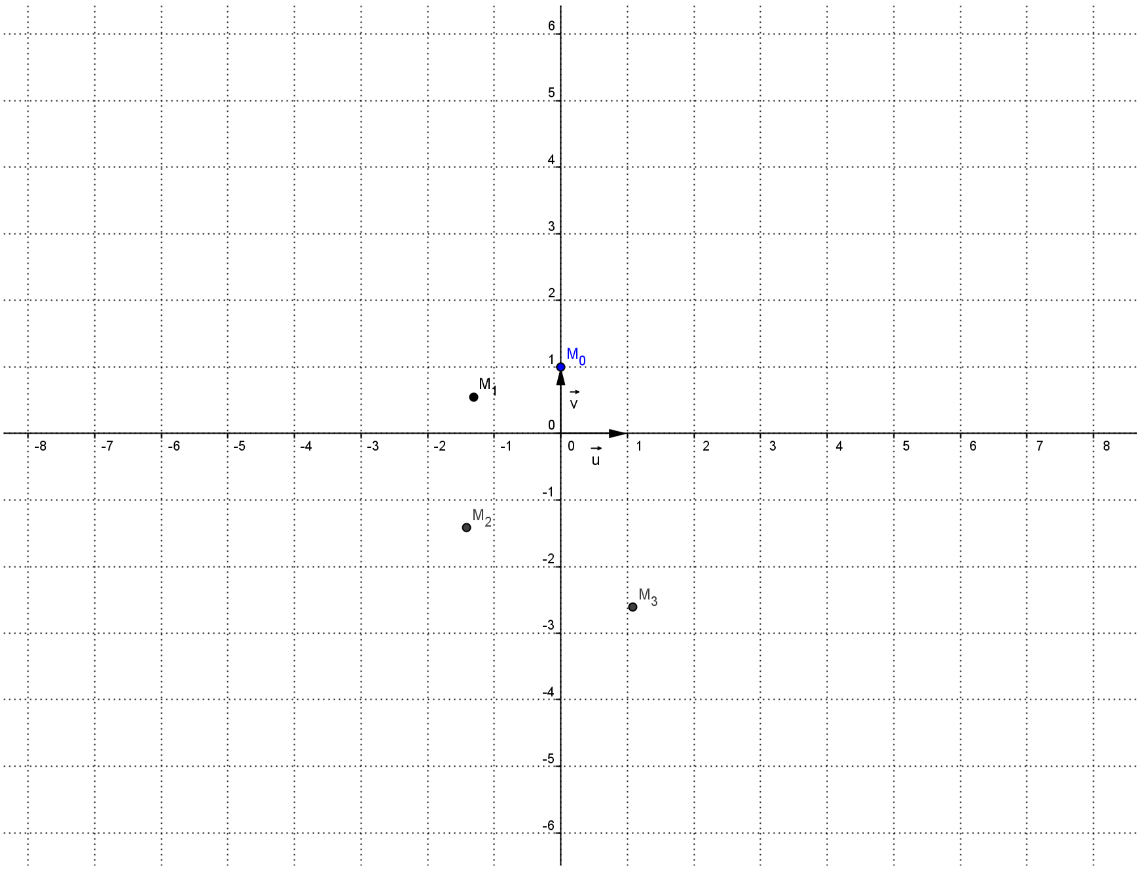
On considère la transformation f du plan, qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d affixe z' définie par $= \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{8}} z$.

On définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :

le point M_0 a pour affixe $z_0 = i$ et pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f\left(M_n\right)$.

On note z_n l'affixe du point M_n.

Les points M_0, M_1, M_2 et M_3 sont placés sur la figure ci-dessous.



1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.
2. On note g la transformation $f \circ f \circ f \circ f$.

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.

b. En déduire que pour tout entier naturel n $OM_{n+4} = 4OM_n$ et que $\left(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+4}}\right) = -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

c. Compléter la figure en construisant les points M_4, M_5 et M_6.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3n\pi}{8}\right)}$.

4. Soient deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$.

a. Exprimer en fonction de n et p une mesure de $\left(\overrightarrow{OM_p}, \overrightarrow{OM_n}\right)$.

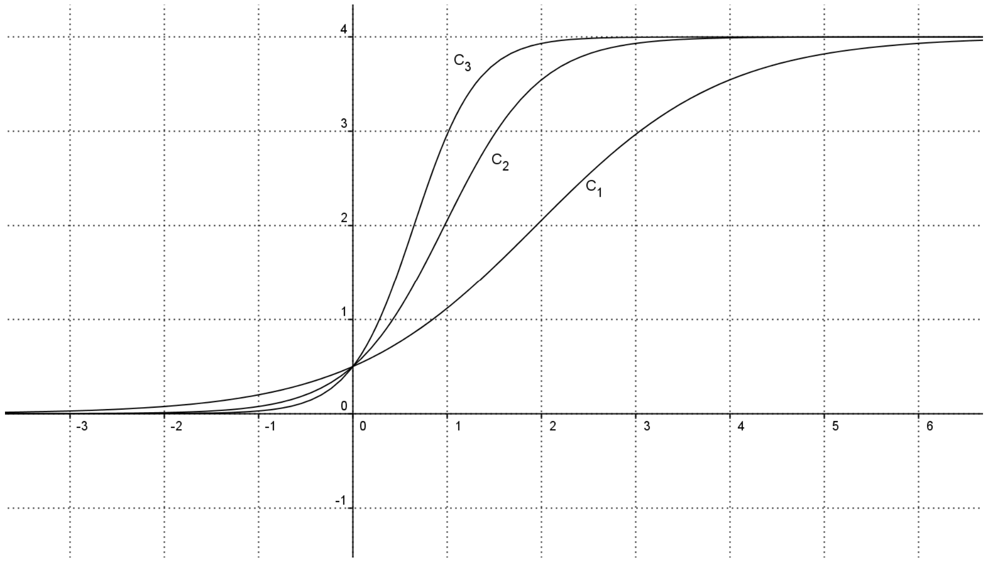
b. Démontrer que les points O, M_p et M_n sont alignés si et seulement si $n-p$ est un multiple de 8.

5. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que le point M_n appartienne à la demi-droite $[Ox)$. On pourra utiliser la partie A.

5. Exercice 4 (8 points)

À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur P par $f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$.

On désigne par C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$. Les courbes C_1, C_2 et C_3 sont données ci-dessous.



Partie A : Etude de la fonction f_1 définie sur P par $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x+7}$.

1. Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x) = \frac{4}{1+7e^{-x}}$.

2. a. Démontrer que la courbe C_1 admet deux asymptotes dont on précisera des équations.

b. Démontrer que la fonction f_1 est strictement croissante sur P.

c. Démontrer que pour tout réel x, $0 < f_1(x) < 4$.

3. a. Démontrer que le point I_1 de coordonnées (ln7, 2) est un centre de symétrie de la courbe C_1.

b. Déterminer une équation de la tangente T_1 à la courbe C_1 au point I_1.

c. Tracer la droite T_1.

4. a. Déterminer une primitive de la fonction f_1 sur P.

b Calculer la valeur moyenne de f_1 sur l'intervalle [0, ln7].

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul le point $A\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe C_n.

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul la courbe C_n et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera l'abscisse. On note I_n ce point d'intersection.
b. Déterminer une équation de la tangente T_n à la courbe C_n au point I_n.
c. Tracer les droites T_2 et T_3.

3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \frac{n}{\ln 7}\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)\,dx$.

Montrer que la suite (u_n) est constante.