Antilles - Guyane

Exercice 1

1. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.
La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

A : $\frac{5}{8}$ B : $\frac{21}{32}$ C : $\frac{11}{32}$ D : $\frac{3}{8}$

→ Cas possibles : 32 ;

→ Cas favorables : 32 – 4 – 7 = 21 cartes du jeu ne sont ni des as ni des piques ;

Donc, puisqu'on est dans une situation d'équiprobabilité, $p = \frac{21}{32} \Rightarrow$ B.

2. On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes.
La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

A : $\frac{105}{248}$ B : $\frac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}}$ C : $\frac{21^2}{32^2}$ D : $\frac{5^2}{8^2}$

→ Cas possibles : $\binom{32}{2} = 496$;

→ Cas favorables : Il faut donc piocher 2 cartes parmi les 21 qui ne sont ni des as ni des piques , soit $\binom{21}{2} = 210$ possibilités ;

Donc, puisqu'on est dans une situation d'équiprobabilité, $p = \frac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{210}{496} = \frac{105}{248} \Rightarrow$ A et B.

3. On suppose que la durée d'attente à un guichet de service, exprimée en heure, suit la loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 1].
La probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 min et 20 min est :

A : $\frac{1}{3}$ B : $\frac{1}{5}$ C : $\frac{1}{12}$ D : $\frac{1}{4}$

Dans une loi uniforme sur [a ; b], $p([\alpha;\beta]) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$ d'où ici $p = p\left(\left[\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right]\right) = \frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{1-0} = \frac{1}{12} \Rightarrow$ C.

4. On considère 10 appareils identiques, de même garantie, fonctionnant indépendamment les uns des autres.
La probabilité pour chaque appareil de tomber en panne durant la période de garantie est égale à 0,15.
La probabilité pour qu'exactement 9 appareils soient en parfait état de marche à l'issue de la période de garantie est égale à :

A : 0,35 à 10^{-2} près B : $0{,}85^9$ C : $0{,}85^9 \times 0{,}15$ D : $0{,}85^9 \times 0{,}15 \times 10$

Schéma de Bernoulli de paramètres n = 10 et p = 0,15. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'appareils tombant en panne durant la période de garantie ; X suit alors la loi binomiale B(10 ; 0,15) et :

$p = p(X=1) = \binom{10}{1} \times 0{,}15^1 \times (1-0{,}15)^9 = 10 \times 0{,}15 \times 0{,}85^9 \approx 0{,}35 \Rightarrow$ A et D.

Exercice 2 non spécialistes

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité 1 cm.

1. Restitution organisée de connaissances

   Pour $M \neq \Omega$, on rappelle que le point M' est l'image du point M par la rotation r de centre Ω et d'angle de mesure θ si et seulement si : $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M & (1) \\ \left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \text{ à } 2k\pi \text{ près } \left(k \in □\right) & (2) \end{cases}$

   a. Soient z, z' et ω les affixes respectives des points M, M' et Ω.

   Traduction des relations (1) et (2) en termes de modules et d'arguments :

   $\rightarrow$ (1) : $\Omega M' = \Omega M \Leftrightarrow \left|z'-\omega\right| = \left|z-\omega\right| \Leftrightarrow \dfrac{\left|z'-\omega\right|}{\left|z-\omega\right|} = 1 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\frac{|z|}{|z'|}=\left|\frac{z}{z'}\right|} \left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1$;

   $\rightarrow$ (2) : $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta$ à $2k\pi$ près $\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta$ à $2k\pi$ près .

   b. L'expression de z' en fonction de z, θ et ω :

   Ainsi, le nombre complexe $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}$ a son module égal à 1 et un de ses arguments égal à θ ; une de ses formes trigonométrique est donc $1\times e^{i\theta} = e^{i\theta}$; Soit $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z'-\omega = e^{i\theta}\left(z-\omega\right) \Leftrightarrow z' = e^{i\theta}\left(z-\omega\right)+\omega$.

2. Résolution dans l'ensemble χ des nombres complexes de l'équation : $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$:

   $\Delta = \left(-4\sqrt{3}\right)^2 - 4\times1\times16 = -16 < 0$ donc l'équation admet 2 racines complexes conjuguées, à savoir :

   $$z_1 = \frac{4\sqrt{3}-4i}{2} = 2\sqrt{3}-2i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{3}+2i .$$

3. Soient A et B les points d'affixes respectives $a = 2\sqrt{3}-2i$ et $b = 2\sqrt{3}+2i$.

   a. a et b sous forme exponentielle :

   $\rightarrow$ $\left|a\right| = \left|2\sqrt{3}-2i\right| = 4$ et $a = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right) = 4\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$ donc $a = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$;

   $\rightarrow$ $b = \overline{a} = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$.

   b. Figure : cf ci-après.

   c. OAB est un triangle équilatéral :

   $\rightarrow$ $OA = \left|a\right| = 4$;

   $\rightarrow$ $OB = \left|b\right| = \left|\overline{a}\right| = \left|a\right| = 4$;

   $\rightarrow$ $AB = \left|b-a\right| = \left|b-\overline{b}\right| = \left|2i\,\mathrm{Im}\left(b\right)\right| = \left|2i\times2\right| = \left|4i\right| = 4$;

   OAB est donc un triangle équilatéral (de côté 4).

4. Soit C le point d'affixe $c = -8i$ et D son image par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

   L'affixe du point D est $d = 4\sqrt{3}+4i$: D'après le 1., $d = e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(c-0\right)+0 = \left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-8i\right) = 4\sqrt{3}+4i$; CQFD !

5. D est l'image du point B par une homothétie de centre O dont on déterminera le rapport :

   On a : $d = 4\sqrt{3}+4i = 2\left(2\sqrt{3}+2i\right) = 2b \;\partial\; z_{\overrightarrow{OD}} = 2z_{\overrightarrow{OB}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow D = h_{O;2}\left(B\right)$;

   D est donc l'image de B par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

6. *OAD* est un triangle rectangle :

- *Méthode 1 :*

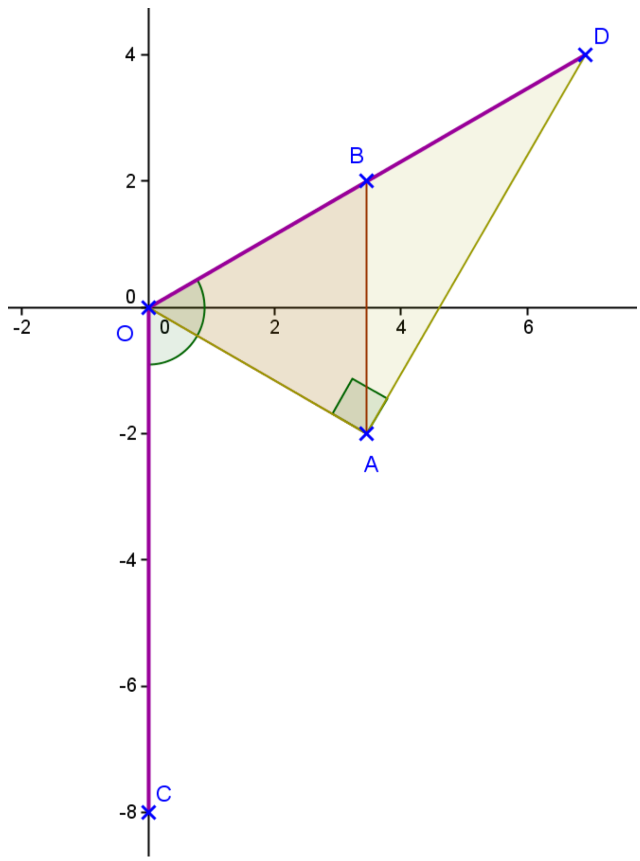
  $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OB}$ donc *B* est le milieu de [*OD*] ; en tenant compte du 3.c., il vient alors : $BO = BA = BD$.
  Le cercle circonscrit au triangle *OAD* est donc le cercle de diamètre [*OD*] ;
  Le triangle *OAD* est donc rectangle en *A*.

- *Méthode 2 :* $\dfrac{0-a}{d-a} = \dfrac{-2\sqrt{3}+2i}{\left(4\sqrt{3}+4i\right)-\left(2\sqrt{3}-2i\right)} = \dfrac{-2\sqrt{3}+2i}{2\sqrt{3}+6i}$

$$= \frac{\left(-2\sqrt{3}+2i\right)\left(2\sqrt{3}-6i\right)}{12+36} = \frac{\cancel{\left(-12+12\right)}+i\left(12\sqrt{3}+4\sqrt{3}\right)}{48} = \frac{\sqrt{3}}{3}i \ ;$$

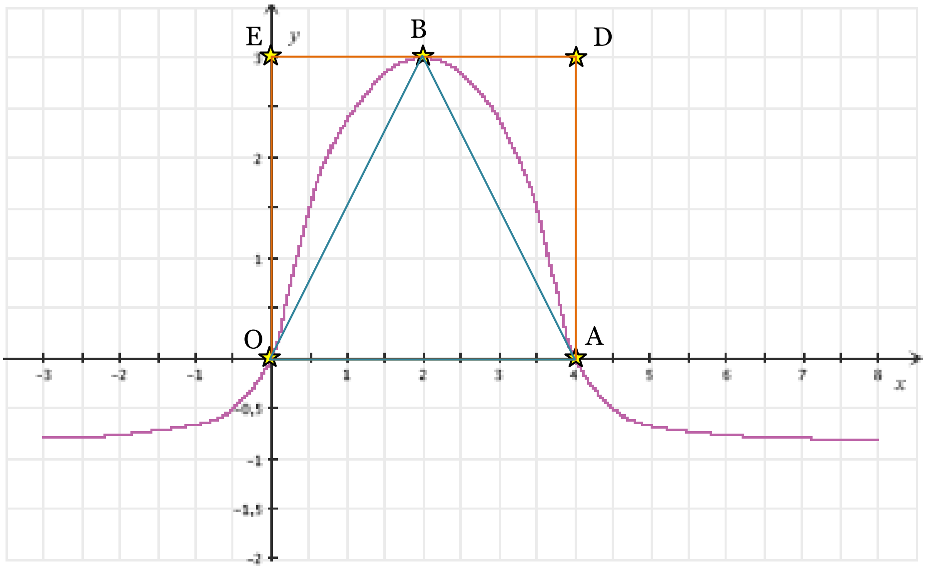
donc $\arg\left(\dfrac{0-a}{d-a}\right) = \arg\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}i\right) = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AO}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ donc le triangle *OAD* est rectangle en *A*.

Figure :



Exercice 3

On donne la représentation graphique d'une fonction *f* définie et continue sur l'intervalle I = [−3 ; 8].



On définit la fonction F sur I, par $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

1. a. F(0) : $F(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$.

b. Signe de $F(x)$:

→ pour x ☒ [0 ; 4] : sur [0 ; 4], f est positive donc sur [0 ; x] ; par conséquent, $F(x)=\int_0^x f(t)dt \geq 0$.

→ pour x ☒ [−3 ; 0] : sur [−3 ; 0], f est négative donc sur [x ; 0] ; par conséquent, $\int_x^0 f(t)dt \leq 0$ d'où

$F(x)=\int_0^x f(t)dt=-\int_x^0 f(t)dt \geq 0$.

a. Justification graphique des inégalités $6 \leq F(4) \leq 12$:

f étant positive sur [0 ; 4], $F(4)=\int_0^4 f(t)dt$ représente l'aire – en u.a.) sous la courbe de f sur [0 ; 4] ;

Il est clair que cette aire est supérieure à celle du triangle OAB (qui vaut 6) et inférieure à celle du rectangle OBDE (qui vaut 12).

2.

a. f pour F : f représente la dérivée de F car, f étant continue sur [-−3 ; 8], F est sa primitive sur [−3 ; 8] qui s 'annule en 0.

b. Sens de variation de la fonction F sur I :

→ f étant négative sur [– 3 ; 0], F est décroissante sur [−3 ; 0] ;

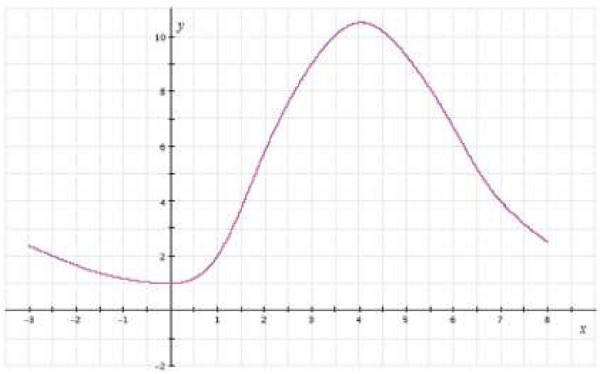
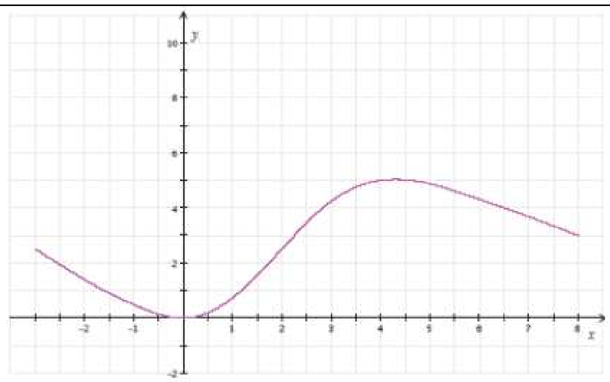
→ f étant positive sur [0 ; 4], F est croissante sur [0 ; 4] ;

→ f étant négative sur [4 ; 8], F est décroissante sur [4 ; 8] .

En résumé :

x	−3		0		4		8
$f(x)$		–	0	+		–	
$F(x)$	$F(-3)$ ↘		0	↗	$F(4)$	↘	$F(8)$

3. On dispose de deux représentations graphiques sur I .

Courbe A	Courbe B
	

Bien que leurs variations soient en accord avec celles de F, aucune des 2 courbes ne peut représenter la fonction F car :

- Pour A : $F(0) \neq 0$ (cf. 1.a.) ;
- Pour B : $F(4) \notin [6\,;\,12]$ (cf. 1.c.) .

Exercice 4

Partie A

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=x-x\ln x$.

1. Limites de la fonction g :

   - en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$, limite de référence, donc, par différence, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$.
   - en $+\infty$: F.I – mais $g(x)=x(1-\ln x)$;

     Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\ln x=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$ donc ,par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

2. g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et $g'(x)=-\ln x$:

   - les 2 fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto \ln x$ sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$ donc leur produit $x\mapsto x\ln x$ aussi ;
   - les 2 fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto x\ln x$ sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$ donc leur différence $x\mapsto x-x\ln x$ aussi ;

   Ainsi, g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $g'(x)=1-\left(1\times\ln x+x\times\dfrac{1}{x}\right)=\cancel{1}-\ln x-\cancel{1}=-\ln x$; CQFD !

3. Tableau de variations de la fonction g :

   → $g'(x)>0 \Leftrightarrow -\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<0 \Leftrightarrow 0<x<1$;

   → g est donc croissante sur l'intervalle]0 ; 1[et décroissante sur l'intervalle]1 ; + [;

   → Tableau de variations de g :

x	0		1		+
$g'(x)$	‖	+	0	–	
$g(x)$	‖ 0	↗	1	↘	–

Partie B $u_n = \dfrac{e^n}{n^n}$.

1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice :

$n =$	1	2	3	4	5	6	7
$u_n \approx$	2,72	1,85	0,75	0,213	0,047	0,086	0,0013

   a. le sens de variation de la suite (u_n) : (u_n) semble décroissante ;

   b. la limite éventuelle de la suite (u_n) : (u_n) semble converger vers 0.

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout n ☒ ✋* par $v_n = \ln(u_n)$.

   a. $v_n = n - n\ln n$: $v_n = \ln(u_n) = \ln\left(\dfrac{e^n}{n^n}\right) \underbrace{=}_{\left.\begin{matrix} a>0 \\ b>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b} \ln\left(e^n\right) - \ln\left(n^n\right) \underbrace{=}_{a>0 \Rightarrow \ln a^n = n\ln a} n\ln e - n\ln n \underbrace{=}_{\ln e = 1} n - n\ln n$.

   b. Sens de variation de la suite (v_n) : $v_n = n - n\ln n = g(n)$;

   Or $n \geq 1$ et g décroissante sur $[1\,;+\;[$ donc $g(n) > g(n+1) \Leftrightarrow v_n > v_{n+1}$; (v_n) est donc décroissante.

   c. Sens de variation de la suite (u_n) : $v_n = \ln(u_n) \Leftrightarrow u_n = e^{v_n}$;

   Or la fonction exponentielle est croissante sur ☑ donc, puisque (v_n) est décroissante, (u_n) est aussi décroissante.

3. La suite (u_n) est bornée :

   → $u_n = \dfrac{e^n}{n^n}$ > 0 comme quotient de 2 nombres positifs ; (u_n) est donc minorée par 0 ;

   → (u_n) étant décroissante, (u_n) est majorée par $u_1 = e$;

   La suite (u_n) est donc bien bornée.

4. La suite (u_n) est convergente et détermination de sa limite :

   → La suite (u_n) étant décroissante et minorée est convergente .

   → On a vu : $u_n = e^{v_n} = e^{g(n)}$;

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{g(n)} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.