

Centres Etrangers

Exercice 1

Question 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les droites (D_1) et (D_2) de représentations

$$\text{paramétriques : } (D_1) : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ et } (D_2) : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 5 - t \\ z = -2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

→ **Affirmation** : Les droites (D_1) et (D_2) sont orthogonales.

VRAI.

Un vecteur directeur de (D_1) est $\vec{u}_1(2; -3; 1)$ et un vecteur directeur de (D_2) est $\vec{u}_2(-2; -1; 1)$;

D'où $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 2 \times (-2) + (-3) \times (-1) + 1 \times 1 = 0$ donc $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$, et par conséquent $(D_1) \perp (D_2)$.

Question 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point A de coordonnées $(2; -1; 3)$ et la

$$\text{droite (D) de représentation paramétrique : } \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

→ **Affirmation** : Le plan (P) contenant le point A et orthogonal à la droite (D) a pour équation : $2x + y - z = 0$.

VRAI.

La droite (D) admet $\vec{u}(4; 2; -2)$ pour vecteur directeur ;

Le plan (P') d'équation $2x + y - z = 0$ admet $\vec{n}(2; 1; -1)$ pour vecteur normal donc $\vec{u} = 2\vec{n}$ et passe par A car $2 \times 2 + (-1) - 3 = 0$; Il s'agit donc du plan (P).

Question 3

La durée de vie, exprimée en heures, d'un jeu électronique, est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle

de paramètre $\lambda = 0,0003$. On rappelle que, pour tout $t > 0$, $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

→ **Affirmation** : La probabilité pour que la durée de vie de ce jeu soit strictement supérieure à 2 000 heures est inférieure à 0,5.

FAUX.

$$\begin{aligned} p(X > 2000) &= 1 - p(X \leq 2000) = 1 - \int_0^{2000} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= 1 - \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^{2000} = 1 - \left[-e^{-\lambda \times 2000} + 1 \right] = e^{-\lambda \times 2000} = e^{-0,0003 \times 2000} = e^{-0,6} \approx 0,55 \geq 0,5. \end{aligned}$$

Question 4

A et B sont deux événements liés à une même épreuve aléatoire qui vérifient :

$$p(A) = 0,4, \quad p_A(B) = 0,7 \quad \text{et} \quad p_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,1.$$

→ **Affirmation** : La probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé est égale à $\frac{14}{41}$.

VRAI.

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A) \times p_A(B)}{p(B)} = \frac{0,4 \times 0,7}{p(B)} = \frac{0,28}{p(B)};$$

Mais, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
p(B) &= p((B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A}) \\
&= p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B) = 0,4 \times 0,7 + (1 - p(A)) \times (1 - p_{\bar{A}}(\bar{B})) \\
&= 0,28 + (1 - 0,4) \times (1 - 0,1) = 0,28 + 0,6 \times 0,9 = 0,28 + 0,54 = 0,82 ;
\end{aligned}$$

D'où finalement, $p_B(A) = \frac{0,28}{0,82} = \frac{14}{41}$.

Exercice 2 non spécialistes

Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm, on considère le point A d'affixe $a = -1$ et l'application f , du plan (P) dans lui-même, qui au point M d'affixe z , distinct de A, associe le

point $M' = f(M)$ d'affixe z' tel que : $z' = \frac{iz}{z+1}$.

1. L'affixe des points M tels que $M' = M$:

$$\begin{aligned}
M' = M &\Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow \frac{iz}{z+1} = z \Leftrightarrow iz = z(z+1) \Leftrightarrow z(z+1) - iz = 0 \Leftrightarrow z(z+1-i) = 0 \\
&\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z+1-i = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = -1+i ;
\end{aligned}$$

Il y a donc 2 points invariants par f : O(0) et I(-1+i).

2. Pour tout point M distinct de A et de O, on a $OM' = \frac{OM}{AM}$ et $(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = (\vec{MA}; \vec{MO}) + \frac{\pi}{2}$ à 2π près :

Par passage aux modules et arguments dans l'égalité $z' = \frac{iz}{z+1}$, il vient :

$$\begin{aligned}
\circ \quad |z'| &= \left| \frac{iz}{z+1} \right| \Leftrightarrow |z'| = \frac{|iz|}{|z+1|} \Leftrightarrow |z'| = \frac{|i| \times |z|}{|z-(-1)|} \Leftrightarrow |z'| = \frac{1 \times |z|}{|z-a|} \Leftrightarrow OM' = \frac{OM}{AM} ; \\
\circ \quad \arg(z') &= \arg\left(\frac{iz}{z+1}\right) \Leftrightarrow \arg(z') = \arg(i) + \arg\left(\frac{z-0}{z-a}\right) \\
&\Leftrightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\vec{AM}; \overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = (\vec{MA}; \vec{MO}) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près} .
\end{aligned}$$

3.

- a. Soit B le point d'affixe $b = -\frac{1}{2} + i$.

Construction du point B et de la médiatrice (Δ) du segment [OA] : cf. figure.

- b. L'affixe b' , sous forme algébrique, du point B' image du point B par f :

$$z_{B'} = \frac{iz_B}{z_B + 1} = \frac{i\left(-\frac{1}{2} + i\right)}{\left(-\frac{1}{2} + i\right) + 1} = \frac{-1 - \frac{1}{2}i}{\frac{1}{2} + i} = \frac{\left(-1 - \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} - i\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + i\left(1 - \frac{1}{4}\right)}{\frac{5}{4}} = \frac{-1 + i\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i .$$

B' appartient au cercle (C) de centre O et de rayon 1 :

$$OB' = |z_{B'}| = \left| -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i \right| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{1} = 1 \text{ donc } B' \in (C) ; \text{ CQFD !}$$

Construction du point B' et du cercle (C) dans le repère ; cf. figure.

- c. Si un point M appartient à la médiatrice (Δ), son image M' par f appartient au cercle (C) :

$M \in (\Delta) \Rightarrow OM = OA$; Or, d'après le 2., $OM' = \frac{OM}{AM}$; Donc $OM' = 1$, et par conséquent $M' \in (C)$.

d. Soit C le point tel que le triangle AOC soit équilatéral direct.

Construction, à la règle et au compas, de l'image du point C par f :

D'après le 2., on a :

$$\rightarrow OC' = \frac{OC}{AC} = 1 \Rightarrow C' \in (C);$$

$$\rightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{OC'}) = (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CO}) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} \text{ à } 2\pi \text{ près} \Rightarrow C' \text{ est sur la bissectrice (B) de } \angle OAC.$$

C' est donc le point d'intersection entre (B) et (C) (cf. figure).

4. Dans cette question, on se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble (Γ) des points M distincts de A et de O dont l'image M' par f appartient à l'axe des abscisses.

a. On pose $z = x + iy$ avec x et y réels tels que $(x; y) \neq (-1; 0)$ et $(x; y) \neq (0; 0)$.

$$\text{La partie imaginaire de } z' \text{ est égale à : } \operatorname{Im}(z') = \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2} :$$

\rightarrow Ecrivons z' sous forme algébrique :

$$\begin{aligned} z' &= \frac{iz}{z+1} = \frac{i(x+iy)}{(x+iy)+1} = \frac{-y+ix}{(x+1)+iy} \\ &= \frac{(-y+ix)((x+1)-iy)}{(x+1)^2 + y^2} = \frac{(-y(x+1)+xy) + i(x(x+1)+y^2)}{(x+1)^2 + y^2}; \end{aligned}$$

\rightarrow Partie imaginaire de z' :

$$\operatorname{Im}(z') = \operatorname{Im}\left(\frac{(-y(x+1)+xy) + i(x(x+1)+y^2)}{(x+1)^2 + y^2}\right) = \frac{x(x+1)+y^2}{(x+1)^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2} ; \text{ CQFD !}$$

Nature et éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ) :

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow M' \in (x'x) \text{ (et } M' \neq O \text{ car } M \neq O) \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z') = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x = 0 \text{ et } (x+1)^2 + y^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \text{ et } (x; y) \neq (-1; 0)$$

$$\partial M \text{ appartient au cercle de centre } \Omega\left(-\frac{1}{2}; 0\right) \text{ et de rayon } \frac{1}{2} \text{ privé de A (et de O)}$$

L'ensemble (Γ) est donc le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé des points O et A.

b. Nature de l'ensemble (Γ) à l'aide de la question 2. :

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow M' \in (x'x) \text{ (et } M' \neq O \text{ car } M \neq O) \Leftrightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = 0 + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z};$$

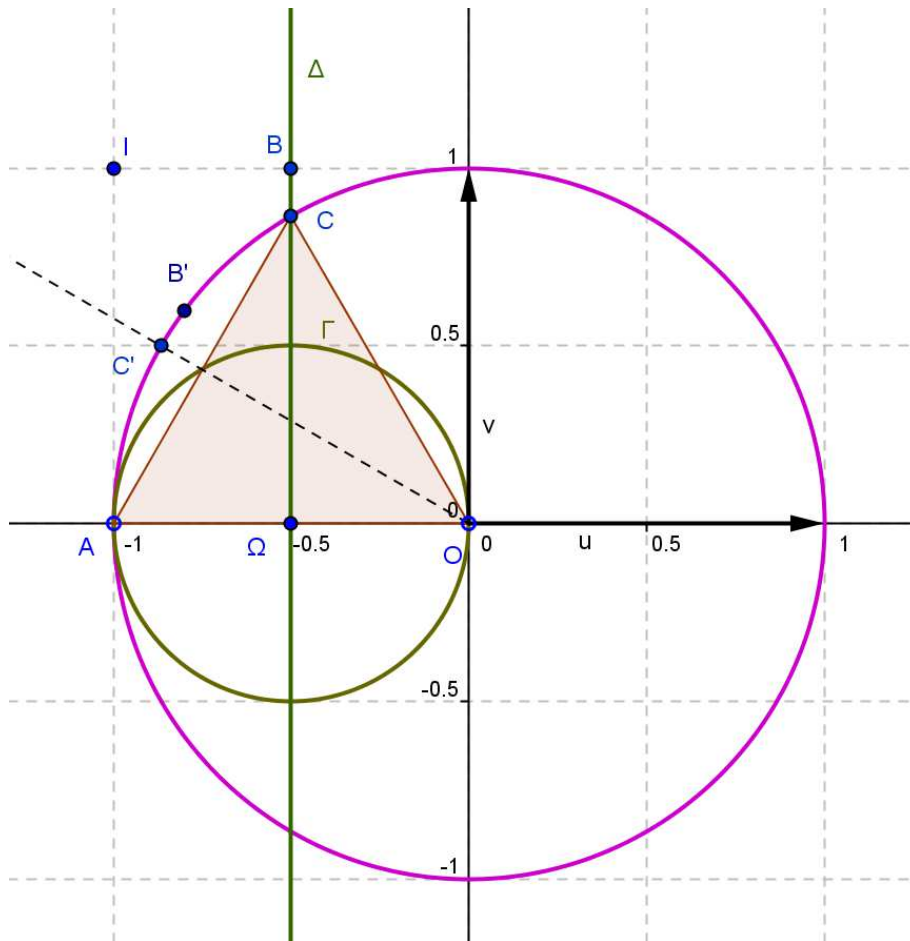
$$\text{Or, pour tout point M distinct de A et de O, on a (d'après 2.) : } (\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MO}) + \frac{\pi}{2} + 2k'\pi ;$$

$$\text{Donc } M \in (\Gamma) \Leftrightarrow 0 + k\pi = (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MO}) + \frac{\pi}{2} + 2k'\pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2} + k''\pi \text{ où } k'' \in \mathbb{Z};$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO} \perp \overrightarrow{MA} \text{ avec } M \neq O \text{ et } M \neq A;$$

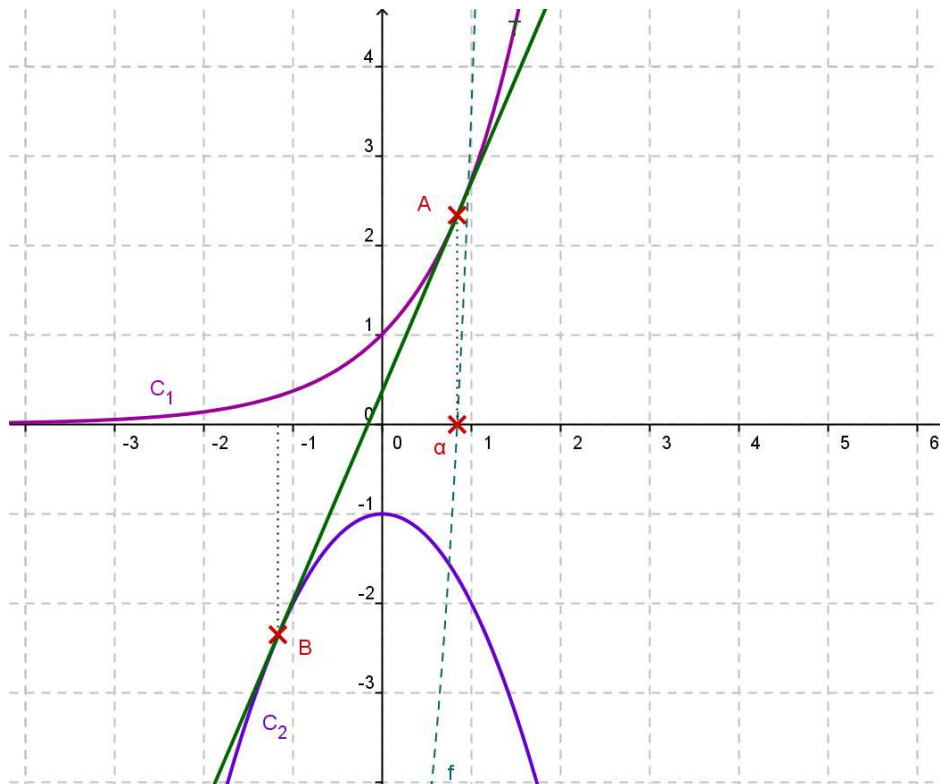
$$\partial M \text{ appartient au cercle de diamètre [OA] privé des points O et A.}$$

L'ensemble (Γ) est donc le cercle de diamètre [OA] privé des points O et A, qui est bien celui trouvé au a. !



Exercice 3

On considère les deux courbes (C_1) et (C_2) d'équations respectives $y = e^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan.



Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente T commune à ces deux courbes.

- Tracé approximatif d'une telle tangente à l'aide d'une règle : cf. graphique.
 - Abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe (C_1) : $a \approx 0,8$;
 - Abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe (C_2) : $b \approx -1,2$;
- On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point d'abscisse a de la courbe (C_1) et par B le point d'abscisse b de la courbe (C_2) .

- Une équation de la tangente (T_A) à la courbe (C_1) au point A :

$$(T_A) : y = f'(a)(x-a) + f(a) \text{ où } f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x ;$$

$$\text{Donc : } (T_A) : y = e^a(x-a) + e^a = e^a x + e^a(1-a).$$

- Une équation de la tangente (T_B) à la courbe (C_2) au point B :

$$(T_B) : y = g'(b)(x-b) + g(b) \text{ où } g(x) = -x^2 - 1 \Rightarrow g'(x) = -2x ;$$

$$\text{Donc : } (T_B) : y = -2b(x-b) - b^2 - 1 = -2bx + b^2 - 1.$$

- Les droites (T_A) et (T_B) sont confondues \Leftrightarrow les réels a et b sont solutions du système (S) :
$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases} :$$

$(T_A) = (T_B) \Leftrightarrow$ elles ont la même équation réduite

\Leftrightarrow elles ont le même coefficient directeur p et la même ordonnée à l'origine q

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_{T_A} = p_{T_B} \\ q_{T_A} = q_{T_B} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ e^a(-a+1) = b^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases} ; \text{CQFD !}$$

- Le système (S) est équivalent au système (S') :
$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{2}e^a \\ e^a - ae^a = \left(-\frac{1}{2}e^a\right)^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{2}e^a \\ e^a - ae^a = \frac{1}{4}e^{2a} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases} ; \text{CQFD !}$$

- Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation (E) :

$$e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = 0.$$

Pour cela, on considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4$.

- Pour tout x appartenant à $]-\infty ; 0[$, $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x-1) < 0$.

- $x < 0 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow e^{2x} < 1 \Rightarrow e^{2x} - 4 < -3 \Rightarrow e^{2x} - 4 < 0$;
- $x < 0 \Rightarrow x - 1 < 0$ et comme $4e^x > 0$, $4e^x(x-1) < 0$.

- L'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty ; 0[$:

$$(E) : e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow (e^{2x} - 4) + 4e^x(x-1) = 0 ;$$

Or pour $x < 0$, $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x-1) < 0$ donc $(e^{2x} - 4) + 4e^x(x-1) < 0$;

L'équation (E) n'a donc pas de solution dans l'intervalle $]-\infty ; 0[$; CQFD !

- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$:

f est dérivable sur \mathbb{R} donc sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et :

$$f'(x) = 2e^{2x} + 4(1 \times e^x + x \times e^x) - 4e^x = 2e^{2x} + 4xe^x = 2e^x(e^x + 2x) ;$$

Comme $e^x > 0$ et que $x \geq 0$, il est clair que $f'(x) > 0$;

f est donc strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$; CQFD !

- d. L'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$:

Remarquons d'abord que (E) $\Leftrightarrow f(x) = 0$;

Or f est définie, continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$; elle réalise donc une bijection de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ sur l'intervalle $\left[f(0) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$.

Or $f(0) = -7$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (e^x + 4x - 4) - 4 = +\infty$ (car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x - 4 = +\infty$).

f réalise donc une bijection de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ sur l'intervalle $[-7 ; +\infty[$.

Comme $0 \in [-7 ; +\infty[$, il admet donc un unique antécédent a par f dans $[0 ; +\infty[$;

L'équation (E) admet donc bien une solution unique dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$, à savoir a ; CQFD !

Un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a :

$f(0,84) \approx -0,11 < 0$ et $f(0,85) \approx 0,07 > 0$ donc, f étant croissante sur $[0 ; +\infty[$, $0,84 < a < 0,85$.

4. On prend pour A le point d'abscisse a .

Un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites (T_A) et (T_B) sont confondues.

$(T_A) = (T_B) \Leftrightarrow (a ; b)$ solution du système (S) (cf. 2.c.)

$$(a ; b) \text{ solution du système (S')} : \begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases} \quad (\text{cf. 2. d.})$$

$$(a ; b) \text{ solution du système : } \begin{cases} e^a = -2b \\ f(a) = 0 \end{cases} \quad (\text{cf. 3.})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ a = \alpha \end{cases} \quad (\text{cf. 3.b. et 3.d.})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha \\ b = -\frac{1}{2}e^\alpha \end{cases} \quad (\text{cf. 3.b. et 3.d.})$$

$$\text{Or } 0,84 < a < 0,85 \Rightarrow e^{0,84} < e^a < e^{0,85} \Rightarrow -\frac{1}{2}e^{0,85} < -\frac{1}{2}e^a < -\frac{1}{2}e^{0,84} \Rightarrow -1,2 < b < -1,1.$$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$.

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étude de propriétés de la fonction f

- a. Le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$:

$$f \text{ est dérivable sur l'intervalle } [0 ; +\infty[\text{ et } f'(x) = 0 - 5 \times \frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2} > 0 ;$$

f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b. Résolution dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'équation $f(x) = x$:

$$f(x) = x \Leftrightarrow 6 - \frac{5}{x+1} = x \Leftrightarrow \frac{6(x+1) - 5 - x(x+1)}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 5x + 1 = 0 ; \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$-x^2 + 5x + 1 = 0 : \Delta = 29 > 0 \text{ donc 2 solutions dans } \mathbb{R} : \begin{cases} \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \approx 5,2 \\ \frac{5 - \sqrt{29}}{2} < 0 \end{cases}$$

Donc, dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$, l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution : $\alpha = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \approx 5,2$.

c. Comme f est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$,

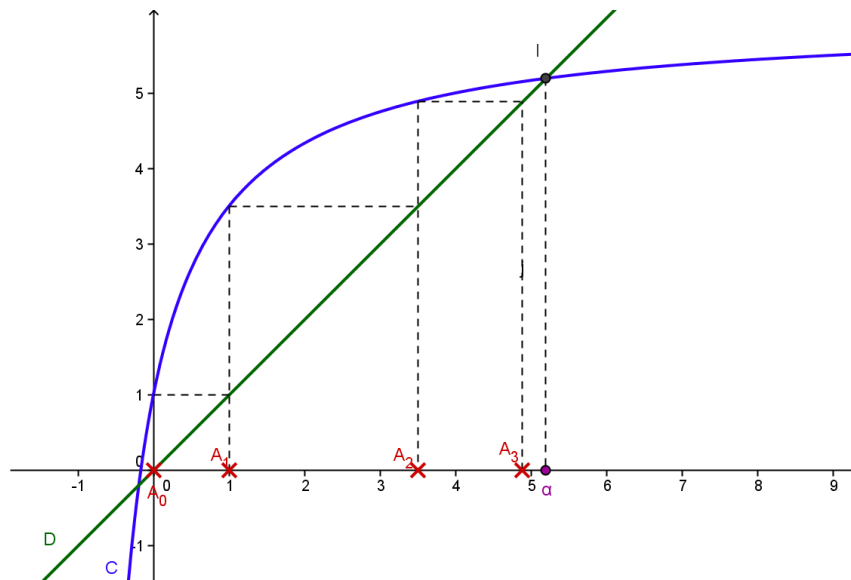
- Si x appartient à l'intervalle $[0 ; \alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0 ; \alpha]$:
Si $0 \leq x \leq \alpha$ alors $f(0) \leq f(x) \leq f(\alpha) \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq \alpha$;
En conséquence, si $x \in [0 ; \alpha]$ alors $f(x) \in [0 ; \alpha]$; CQFD !
- Si x appartient à l'intervalle $[\alpha ; +\infty[$ alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha ; +\infty[$:
Si $x \geq \alpha$ alors $f(x) \geq f(\alpha) \Rightarrow f(x) \geq \alpha$;
En conséquence, si $x \in [\alpha ; +\infty[$ alors $f(x) \in [\alpha ; +\infty[$; CQFD !

2. Étude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$.

Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

a. Sur le graphique, sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.



Construction du point A_0 de coordonnées $(u_0 ; 0)$, et des points A_1, A_2, A_3 (et A_4) d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 (et u_4) : cf. graphique.

Conjectures :

- la suite (u_n) semble croissante ;
- la suite (u_n) semble converger vers α .

b. Pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$, par récurrence :

Notons P_n la propriété : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ » avec $n \in \mathbb{N}$.

→ *Initialisation* : $u_0 = 0$ et $u_1 = f(u_0) = f(0) = 1$ donc on a $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$, soit P_0 vraie (1) ;

→ *Hérédité* : Supposons que P_n soit vraie ; alors il vient successivement :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha \text{ (H.R.)}$$

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\alpha) \text{ (car } f \text{ croissante sur } [0; \alpha])$$

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$$

Donc P_{n+1} vraie (si P_n vraie) (2)

De (1) et (2), il résulte que P_n vraie pour tout $n \geq 0$; CQFD !

c. La suite (u_n) est convergente :

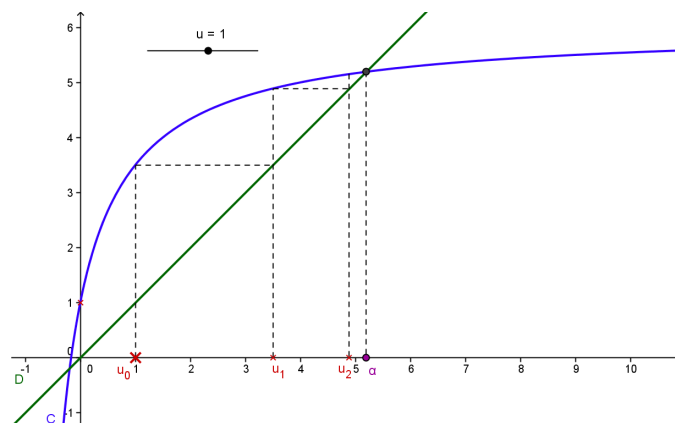
- Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée par α ; elle est donc convergente ;
- Appelons l sa limite ; Passons à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$;
il vient, puisque la fonction f est continue, $l = f(l)$; Donc l est solution de l'équation $f(x) = x$ qui admet sur $[0; +\infty[\cap \alpha$ pour unique solution. Comme $0 \leq l \leq \alpha$, $l = \alpha$.

Ainsi, (u_n) converge vers α .

3. Étude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0

Sens de variation et convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 :

- $0 \leq u_0 < \alpha$: (u_n) croissante et converge vers α ;



- $u_0 = \alpha$: (u_n) constante à α (donc converge vers α) ;
- $u_0 > \alpha$: (u_n) décroissante et converge vers α .

