

Centres étrangers (Maroc)

1. Exercice 1 (4 points)

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Question 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les droites (D_1) et (D_2) de

$$\text{représentations paramétriques : } (D_1) \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } (D_2) : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 5 - t \\ z = -2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation : Les droites (D_1) et (D_2) sont orthogonales.

Question 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point A de coordonnées

$$(2; -1; 3) \text{ et la droite } (D) \text{ de représentation paramétrique : } \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation : Le plan (P) contenant le point A et orthogonal à la droite (D) a pour équation : $2x + y - z = 0$.

Question 3

La durée de vie, exprimée en heures, d'un jeu électronique, est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0003$.

Affirmation : La probabilité pour que la durée de vie de ce jeu soit strictement supérieure à 2 000 heures est inférieure à 0,5.

Question 4

A et B sont deux événements liés à une même épreuve aléatoire qui vérifient : $p(A) = 0,4$; $p_A(B) = 0,7$ et $p_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,1$.

Affirmation : La probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé est égale à $\frac{14}{41}$.

2. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm, on considère le point A d'affixe $a = -1$ et l'application f , du plan (P) dans lui-même, qui au point M d'affixe z , distinct de A , associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' tel que : $z' = \frac{iz}{z+1}$.

1. Déterminer l'affixe des points M tels que $M' = M$.

2. Démontrer que pour tout point M distinct de A et de O , on a : $OM' = \frac{OM}{AM}$ et

$$(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = (\vec{MA}; \vec{MO}) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

3. a. Soit B le point d'affixe $b = -\frac{1}{2} + i$. Placer dans le repère le point B et la médiatrice (Δ) du segment $[OA]$.

b. Calculer sous forme algébrique l'affixe b' du point B' image du point B par f .

Établir que B' appartient au cercle (C) de centre O et de rayon 1.

Placer le point B' et tracer le cercle (C) dans le repère.

c. En utilisant la question 2, démontrer que, si un point M appartient à la médiatrice (Δ), son image M' par f appartient au cercle (C).

d. Soit C le point tel que le triangle AOC soit équilatéral direct. En s'aidant des résultats de la question 2, construire, à la règle et au compas, l'image du point C par f (on laissera apparents les traits de construction).

4. Dans cette question, on se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble (Γ) des points M distincts de A et de O dont l'image M' par f appartient à l'axe des abscisses.

Les questions a. et b. peuvent être traitées de façon indépendante.

a. On pose $z = x + iy$ avec x et y réels tels que $(x, y) \neq (-1, 0)$ et $(x, y) \neq (0, 0)$.

Démontrer que la partie imaginaire de z' est égale à : $\text{Im}(z') = \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2}$.

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ) et le tracer dans le repère.

b. À l'aide de la question 2, retrouver géométriquement la nature de l'ensemble (Γ).

3. Exercice 2 (5 points, spécialistes)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct ($O; \vec{u}, \vec{v}$) d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C, M, N et P d'affixes respectives : $a = 1 + i$, $b = -1 + 2i$, $c = 2 + 3i$, $m = 7 - 5i$, $p = 9 + i$.

1. a. Placer les points A, B, C, M, N et P dans le repère.

b. Calculer les longueurs des côtés des triangles ABC et NMP .

c. En déduire que ces deux triangles sont semblables.

Dans la suite de l'exercice, on se propose de mettre en évidence deux similitudes qui transforment le triangle ABC en le triangle MNP .

2. Une similitude directe

Soit s la similitude directe qui transforme le point A en N et le point B en P .

a. Montrer qu'une écriture complexe de la similitude s est : $z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)z + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i$.

b. Déterminer le rapport, la valeur de l'angle arrondie au degré, ainsi que le centre de la similitude s .

c. Vérifier que la similitude s transforme le point C en M .

3. Une similitude indirecte

Soit s' la similitude dont l'écriture complexe est : $z' = 2i\bar{z} + 3 - 3i$.

a. Vérifier que : $s'(A) = N$, $s'(B) = M$, $s'(C) = P$.

b. Démontrer que s' admet un unique point invariant K d'affixe $k = 1 - i$.

c. Soit h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{2}$ et J le point d'affixe 2. On pose : $f = s' \circ h$.

Déterminer les images des points K et J par la transformation f . En déduire la nature précise de la transformation f .

d. Démontrer que la similitude s' est la composée d'une homothétie et d'une réflexion.

4. Exercice 3 (6 points)

On considère les deux courbes (C_1) et (C_2) d'équations respectives $y = e^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan.

Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente T commune à ces deux courbes.

1. Sur le graphique ci-dessous, tracer approximativement une telle tangente à l'aide d'une règle.

Lire graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe (C_1) et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe (C_2) .

2. On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point d'abscisse a de la courbe (C_1) et par B le point d'abscisse b de la courbe (C_2) .

a. Déterminer une équation de la tangente (T_A) à la courbe (C_1) au point A .

b. Déterminer une équation de la tangente (T_B) à la courbe (C_2) au point B .

c. En déduire que les droites (T_A) et (T_B) sont confondues si et seulement si les réels a et b sont solutions

du système (S) :
$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases}.$$

d. Montrer que le système (S) est équivalent au système (S') :
$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}.$$

3. Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation

$$(E) : e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = 0.$$

Pour cela, on considère la fonction f définie sur \mathbb{P} par : $f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4$.

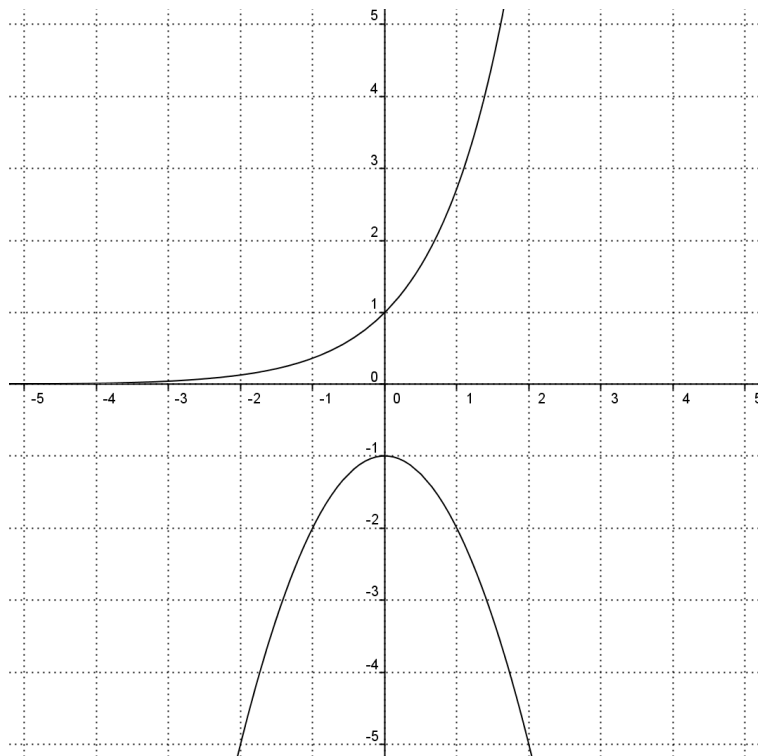
a. Montrer que pour tout x appartenant à $]-\infty; 0[$, $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x-1) < 0$.

b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty; 0[$.

c. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

d. Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[0; +\infty[$. On note a cette solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a .

4. On prend pour A le point d'abscisse a . Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites (T_A) et (T_B) sont confondues.



5. Exercice 4 (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$.

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étude de propriétés de la fonction f

a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

b. Résoudre dans l'intervalle $[0; +\infty[$ l'équation $f(x) = x$. On note α la solution.

c. Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0; \alpha[$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0; \alpha[$.

De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.

2. Étude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$

Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

a. Sur le graphique ci-dessous, sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.

Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0; 0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4 .

Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?

b. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Étude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0

Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?

