Polynésie

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Prérequis

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + bi$ où a et b sont deux nombre réels.

On note $\overline{z}$, le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - ib$.

Questions

1. Pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$:

   Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ les formes algébriques des nombres complexes z et z' ; Alors :

   → $z \times z' = (a+ib)(a'+ib') = (aa'-bb') + i(ab'+a'b) \Rightarrow \overline{z \times z'} = (aa'-bb') - i(ab'+a'b)$,

   → $\overline{z} \times \overline{z'} = (a-ib)(a'-ib') = (aa'-bb') - i(ab'+a'b)$;

   On a donc bien que $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$; CQFD !

2. Pour tout entier naturel n non nul, et tout nombre complexe z, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$:

   Recourons à un raisonnement par récurrence ; Notons P_n la propriété : « $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ » avec $n \geq 1$.

   → *Initialisation* : $\overline{z^1} = \overline{z}$ et $(\overline{z})^1 = \overline{z}$ donc on a $\overline{z^1} = (\overline{z})^1$, soit P_1 vraie (1) ;

   → *Hérédité* : Supposons que P_n soit vraie ; alors :

   $$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z} \underbrace{=}_{\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}} \overline{z^n} \times \overline{z} \underbrace{=}_{H.R.} (\overline{z})^n \times \overline{z} = (\overline{z})^{n+1}$$, soit P_{n+1} vraie (si P_n vraie) (2)

   De (1) et (2), il résulte que P_n vraie pour tout $n \geq 1$; CQFD !

Partie B

On considère l'équation (E) : $z^4 = -4$ où z est un nombre complexe.

1. Si z est solution de (E) alors $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de (E) :

   z étant supposé solution de (E), $z^4 = -4$ d'où :

   → $(-z)^4 = z^4 = -4 \Rightarrow -z$ solution de (E) ;

   → $(\overline{z})^4 = \overline{z^4} = \overline{-4} = -4 \Rightarrow \overline{z}$ solution de (E).

2. On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + i$.

   a. z_0 sous forme exponentielle : $|z_0| = |1+i| = \sqrt{2}$ d'où :

   $$z_0 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

   b. z_0 est solution de l'équation (E) : $z_0^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 e^{i\left(4\times\frac{\pi}{4}\right)} = 4e^{i\pi} = -4 \Rightarrow z_0$ solution de (E).

3. Trois autres solutions de l'équation (E) : z_0 solution de (E) $\Rightarrow$

   $$z_0 \text{ solution de (E) } \Rightarrow \begin{cases} -z_0 \text{ solution de (E)} \\ \overline{z_0} \text{ solution de (E)} \end{cases} \Rightarrow -\overline{z_0} = \overline{-z_0} \text{ solution de (E) } ;$$

   Donc $-1 - i$, $1 - i$ et $-1 + i$ sont trois autres solutions de (E) (et les seules d'ailleurs).

Partie C

Soient *A, B, C* et *D* les points d'affixes respectives $z_A = 1 + i$, $z_B = -1 + i$, $z_C = -1 - i$ et $z_D = 1 - i$ (solutions de (E) donc).

Soit r la rotation du plan de centre C et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$.

On appelle E l'image du point B par r et F celle du point D par r.

1. Ecriture complexe de la rotation r : $z' - z_C = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - z_C) \Leftrightarrow z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z + 1 + i) - 1 - i$

2.

   a. L'affixe du point E est égale à $-1+\sqrt{3}$: Puisque $E = r(B)$,

$$z_E = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_B + 1 + i) - 1 - i = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)(-\cancel{1} + i + \cancel{1} + i) - 1 - i$$

$$= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times 2i - 1 - i = \cancel{i} + \sqrt{3} - 1 - \cancel{i} = -1 + \sqrt{3} \text{ ; CQFD !}$$

   b. L'affixe z_F du point F : Puisque $F = r(D)$,

$$z_F = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_D + 1 + i) - 1 - i = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times(1 - \cancel{i} + 1 + \cancel{i}) - 1 - i = \cancel{1} - i\sqrt{3} - \cancel{1} - i = -(1 + \sqrt{3})i\,.$$

   c. Le quotient $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un nombre réel :

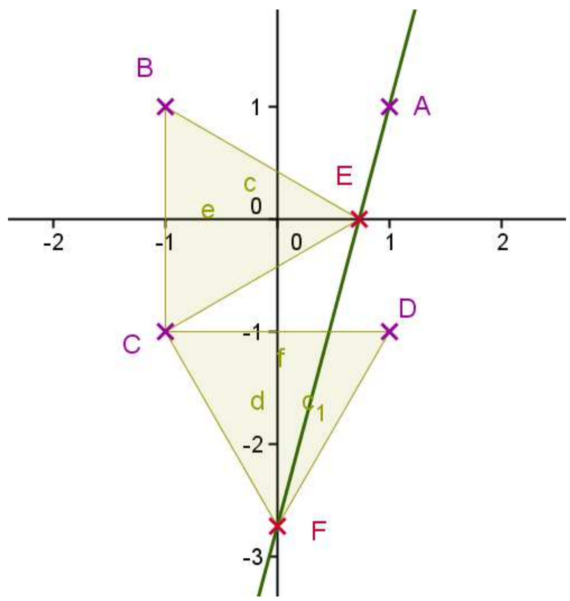
$$\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F} = \frac{(1+i) - (-1+\sqrt{3})}{(1+i) - \left(-(1+\sqrt{3})i\right)} = \frac{(2-\sqrt{3}) + i}{1 + (2+\sqrt{3})i} = \frac{\left((2-\sqrt{3}) + i\right)\left(1 - (2+\sqrt{3})i\right)}{1^2 + (2+\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{\left((2 - \cancel{\sqrt{3}}) + (2 + \cancel{\sqrt{3}})\right) + i\left(1 - (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})\right)}{1 + (4 + 4\sqrt{3} + 3)} = \frac{4 + i(\cancel{1-1})}{8 + 4\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} \in \mathbb{R}\,.$$

   d. Conséquence pour les points A, E et F :

   - *Méthode* 1 : $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z_A - z_E = \alpha(z_A - z_F) \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{EA}} = \alpha z_{\overrightarrow{FA}} \Leftrightarrow \overrightarrow{EA} = \alpha\overrightarrow{FA}$ où α ☒ ☑ ;
   - *Méthode* 2 : $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F}\right) = 0[\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{FA};\overrightarrow{EA}\right) = 0[\pi]$;

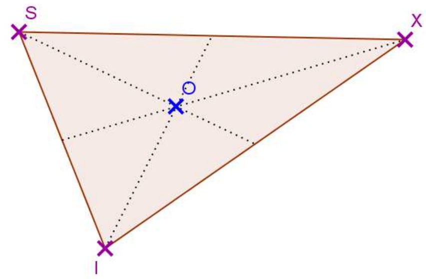
   Donc A, E et F alignés.



Exercice 2

Des robots se trouvent au centre de gravité O d'un triangle de sommets S, I et X.

Chacun se déplace en trois étapes successives de la manière suivante :



→ à chaque étape, il passe par l'un des trois sommets S, I et X puis il rejoint le point O;

→ les robots sont programmés de telle sorte que, lors d'une étape, la probabilité de passer par le sommet S est égale à celle de passer par le sommet X et la probabilité de passer par le sommet S est le double de celle de passer par le sommet I ;

→ les différentes étapes sont indépendantes les unes des autres ;

→ on ne tient pas compte des passages par O.

Partie A - Un seul robot

Un seul robot se trouve au point O.

Notations : On notera S_i (respectivement I_i et X_i) l' événement « le robot passe par le sommet S (respectivement I et X) à l' étape n° ».

1. A chaque étape, la probabilité que le robot passe par le sommet I est égale à $\frac{1}{5}$:

   - D'après l' hypothèse 1, p(S) + p(X) + p(I) = 1 ;
   - D'après l' hypothèse 2, p(S) = p(X) et p(S) = 2p(I) .

   D'où : 2p(I) + 2p(I) + p(I) = 1 ∂ 5p(I) = 1 ∂ p(I) = $\frac{1}{5}$; CQFD !

   Et par conséquent, p(S) = p(X) = $\frac{2}{5}$.

2. On note E l'évènement : « au cours des trois étapes, le robot passe successivement par les 3 sommets S, I et X dans cet ordre ».

   La probabilité de E est égale à $\frac{4}{125}$: On a $E = S_1 \cap I_2 \cap X_3$; Donc

   $P(E) = p(S_1 \cap I_2 \cap X_3) = p(S_1) * p(I_2) * p(X_3)$ ces événements étant indépendants d'après l'hypothèse 3

   $$= \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{125} \text{ ; CQFD !}$$

3. On note F l'évènement : « au cours des trois étapes, le robot passe exactement par les 3 sommets S, I et X dans un ordre quelconque ».

   La probabilité de F : il y a 3 ! = 6 façons d'ordonner les sommets S, I et X dans un ordre quelconque donc il est clair que : $p(F) = 6 * p(E) = 6 \times \frac{4}{125} = \frac{24}{125}$.

Partie B - Plusieurs robots

Des robots se trouvent au point O, leurs déplacements étant indépendants les uns des autres.

Nombre minimal n de robots doit-il y avoir pour que la probabilité de l'événement : « au moins l'un des robots passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre » soit supérieure ou égale à 0,99 :

- On est, vu les hypothèses, en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et $p = p(E) = \frac{4}{125}$.

- Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de robots qui passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre. Alors X suit la loi binomiale B(n ; $\frac{4}{125}$).
- Soit G l'événement « au moins l'un des robots passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre » ;

  Alors p(G) = p(X ≥ 1) = 1 − p(X = 0) = $1-\cancel{\binom{n}{0}\left(\frac{4}{125}\right)^{0}}\left(1-\frac{4}{125}\right)^{n-0}=1-\left(1-\frac{4}{125}\right)^{n}=1-\left(\frac{121}{125}\right)^{n}$.
- Donc p(G) ≥ 0,99 $\Leftrightarrow 1-\left(\frac{121}{125}\right)^{n}\geq 0,99 \Leftrightarrow 0,01\geq\left(\frac{121}{125}\right)^{n}$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\ln\ \text{croissante}} \ln 0,01 \geq \ln\left(0,968^{n}\right) \underbrace{\Leftrightarrow}_{x>0\Rightarrow \ln x^{n}=n\ln x} \ln 0,01 \geq n\times \ln 0,968 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\ln 0,968<0} \frac{\ln 0,01}{\ln 0,968}\leq n \underbrace{\Leftrightarrow}_{n\in\square} n\geq 142 .$$

Exercice 3 non spécialistes

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- les points A(1 ; 1 ; 1) et B(3 ; 2 ; 0) ;
- le plan (P) passant par le point B et admettant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal ;
- le plan (Q) d'équation : $x - y + 2z + 4 = 0$;
- la sphère (S) de centre A et de rayon AB.

1. Une équation cartésienne du plan (P) est : $2x + y - z - 8 = 0$:

   → $\overrightarrow{AB}(2;1;-1)$ étant normal à (P), une équation cartésienne de (P) est de la forme $2x + y - z + d = 0$;

   → Puisque B(3 ; 2 ; 0) ⊠ (P), 2∗3 + 2 − 0 + d = 0 ∂ d = −8 ;

   Donc (P) : $2x + y - z - 8 = 0$; CQFD !
2. Une équation de la sphère (S) : (S) a pour équation

   → $AB=\sqrt{2^{2}+1^{2}+(-1)^{2}}=\sqrt{6}$;

   → $M(x;y;z)\in(S)\Leftrightarrow AM = AB \Leftrightarrow AM^{2}=AB^{2}\Leftrightarrow (x-1)^{2}+(y-1)^{2}+(z-1)^{2}=6$;

   Donc (S) : $(x-1)^{2}+(y-1)^{2}+(z-1)^{2}=6$.
3.
   a. Distance du point A au plan (Q) : $d\left(A;(Q)\right)=\frac{\left|x_{A}-y_{A}+2z_{A}+4\right|}{\sqrt{1^{2}+(-1)^{2}+2^{2}}}=\frac{\left|1-1+2+4\right|}{\sqrt{6}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$.

   Le plan (Q) est tangent à la sphère (S) : Ainsi $d\left(A;(Q)\right)=AB$; Or A est le centre de (S) et AB son rayon, donc (Q) est bien tangent à (S) ; CQFD !

   b. Le plan (P) est tangent à la sphère (S) : (P) passe par B, point de (S), et admet $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal ; il est donc tangent à (S) (en B).
4. On admet que le projeté orthogonal de A sur le plan (Q), noté C, a pour coordonnées (0 ; 2 ; −1).

   a. Les plans (P) et (Q) sont sécants :

   Un vecteur normal à (P) est $\vec{n}(2;1;-1)$ et un vecteur normal à (Q) est $\vec{n}'(1;-1;2)$;

Il est clair que $\vec{n}(2;1;-1)$ et $\vec{n}'(1;-1;2)$ ne sont pas colinéaires donc (P) et (Q) ne sont pas parallèles ; ils sont donc sécants (suivant une droite).

b. Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et (Q).

Une représentation paramétrique de la droite (D) est : $\begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$ avec t ⊠ ☑ :

$$M(x;y;z) \in (D) \Leftrightarrow M(x;y;z) \in (P) \cap (Q) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z - 8 = 0 \\ x - y + 2z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x + y - 8 \\ x - y + 2(2x + y - 8) + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x + y - 8 \\ 5x + y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5x + 12 \\ z = 2x + (-5x + 12) - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5x + 12 \\ z = -3x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$$ où t ⊠ ☑ ; CQFD !

c. A n'appartient pas à la droite (D) :

→ *Méthode 1 :* $A(1;1;1) \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = t \\ 1 = 12 - 5t \\ 1 = 4 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = t \\ 1 = 7 \\ 1 = 1 \end{cases}$ donc A ⊠ (D) ;

→ *Méthode 2 :* A est le centre de (S) et (P) et (Q) sont tangents à (S), sphère de rayon non nul, donc A n'appartient ni à (P) ni à (Q) donc encore moins à (D) !.

d. On appelle (R) le plan défini par le point A et la droite (D) (définition légitime car A ⊠ (D)).

Tout point du plan (R) est équidistant des points B et C ∂ (R) est le plan médiateur de [BC].

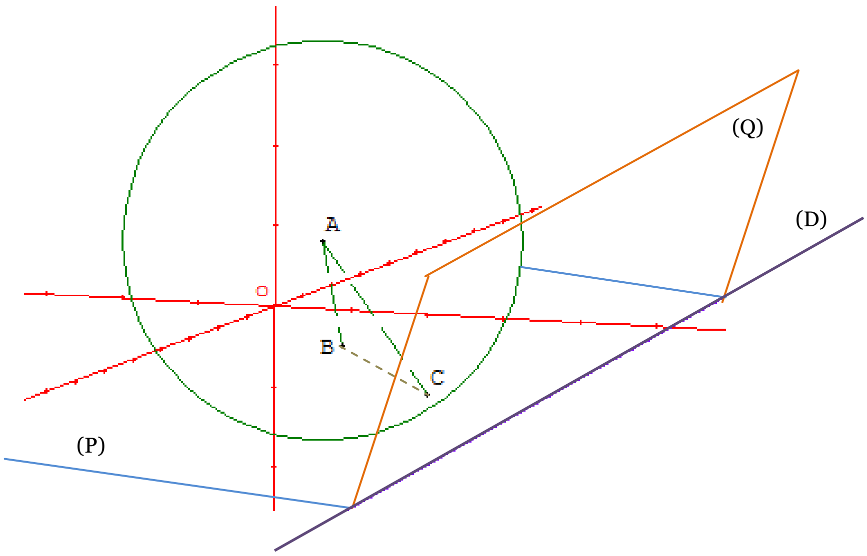
→ C étant le projeté orthogonal de A sur le plan (Q) qui est tangent à (S), CA = AB (rayon de (S)) (1)

→ Cherchons deux points de (D) : $t = 0 \Rightarrow$ E(0 ; 12 ; 4) et $t = 1 \Rightarrow$ F(1 ; 7 ; 1) ; Alors :

- $BE = \sqrt{(0-3)^2 + (12-2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9 + 100 + 16} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$,
- $CE = \sqrt{(0-0)^2 + (12-2)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{0 + 100 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$,
- $BF = \sqrt{(1-3)^2 + (7-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{4 + 25 + 1} = \sqrt{30}$,
- $CF = \sqrt{(1-0)^2 + (7-2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{1 + 25 + 4} = \sqrt{30}$;

Donc BE = EC et BF = FC (2) ;

Ainsi, de (1) et (2), (R) contient trois points – A, E et F – non alignés équidistants de B et C : c'est donc le plan médiateur de [BC]. L'affirmation est donc vraie.



Exercice 4

Partie A

1. On considère la fonction g définie sur [1 ; +∞[par $g(x) = \ln(2x) + 1 - x$.

   a. L'équation $g(x) = 0$ admet sur [1 ; +∞[une unique solution notée α :

   - Variations de g sur [1 ; +∞[:

     La fonction g est dérivable sur [1 ; +∞[car $x \mapsto \ln(2x)$ et $x \mapsto 1 - x$ le sont et donc, par somme, g aussi et $g'(x) = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}x} - 1 = \frac{1-x}{x}$;

     Sur [1 ; + [, $1 - x \le 0$ et $x > 0$ donc $g'(x) \le 0$ avec $g'(x) < 0$ si $x > 1$;

     g est donc strictement décroissante sur [1 ; + [.

   - Limite en + de g :

     F.I. − mais $g(x) = \ln(2x) + 1 - x = \ln 2 + \ln x + 1 - x = x\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) + \ln 2 + 1$;

     Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} - 1 = -1$ et par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$;

     Puis, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) + \ln 2 + 1 = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

     Autre méthode : $g(x) = \ln(2x) + 1 - x = x\left(2 \times \frac{\ln(2x)}{2x} - 1\right) + 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(2x)}{2x} \underbrace{=}_{X = 2x} \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$.

   - Calcul de $g(1)$: $g(1) = \ln(2 \times 1) + \cancel{1} - \cancel{1} = \ln 2 > 0$.

   Ainsi, g est définie, continue (puisque dérivable) et strictement décroissante sur l'intervalle [1 ; + [; elle réalise donc une bijection de l'intervalle [1 ; + [sur l'intervalle $\left]\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) ; g(1)\right] =]-\infty ; \ln 2]$. Or 0 ⊠]− ; ln2] donc 0 admet par g un unique antécédent α dans l'intervalle [1 ; + [, autrement-dit l'équation $g(x) = 0$ admet sur [1 ; +∞[une unique solution α.

   b. $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$: α solution de $g(x) = 0$ donc $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln(2\alpha) + 1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \ln(2\alpha) + 1 = \alpha$; CQFD !

   Remarque : α est donc l'abscisse du point d'intersection sur [1 ; + [entre (Γ) et la droite (D) : $y = x$.

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1$.

   On désigne par (Γ) la courbe d'équation $y = \ln(2x) + 1$ dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

   a. Construction sur l'axe des abscisses des quatre premiers termes de la suite : cf figure.

   b. Pour tout entier naturel n, $1 \le u_n \le u_{n+1} \le 3$:

   Recourons à un raisonnement par récurrence ; Notons P_n la propriété : « $1 \le u_n \le u_{n+1} \le 3$ » avec n ⊠ ☟.

   → *Initialisation* : $u_0 = 1$ et $u_1 = \ln(2u_0) + 1 = 1 + \ln 2 \approx 1,7$ donc on a $1 \le u_0 \le u_1 \le 3$, soit P_0 vraie (1) ;

   → *Hérédité* : Supposons que P_n soit vraie ; alors il vient successivement :

   $$1 \le u_n \le u_{n+1} \le 3 \text{ (H.R.) puis}$$

   $$2 \le 2u_n \le 2u_{n+1} \le 6 \ (*2 > 0)$$

$$\ln 2 \leq \ln(2u_n) \leq \ln(2u_{n+1}) \leq \ln 6 \text{ (car } ln \text{ croissante)}$$

$$\ln 2 + 1 \leq \ln(2u_n) + 1 \leq \ln(2u_{n+1}) + 1 \leq \ln 6 + 1 \text{ (+1)}$$

D'où il vient, puisque ln2 + 1 ≈1,7 et ln6 + 1 ≈ 2,8, $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$, soit P_{n+1} vraie (si P_n vraie) (2)

De (1) et (2), il résulte que P_n vraie pour tout $n \geq 0$; CQFD !

c. La suite (u_n) converge vers α :

- Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée par 3 ; elle est donc convergente ;
- Appelons l sa limite ; Passons à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1$; il vient, puisque la fonction *ln* est continue, $l = \ln(2l) + 1 \Leftrightarrow g(l) = 0$; Donc l est solution de l'équation $g(x) = 0$ qui admet sur [1 ; +∞[α pour unique solution. Comme $l \geq 1$ car $1 \leq u_n$, $l = \alpha$.

Ainsi, (u_n) converge vers α ; CQFD !

Partie B

On considère la fonction f définie sur [1 ; +∞[par : $f(x) = (x-1)e^{1-x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose : $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x (t-1)e^{1-t}\,dt$.

a. La fonction F est croissante sur [1 ; +∞[:

f étant continue sur [1 ; +∞[, F est, par définition, sa primitive qui s'annule en 1 ; Donc $F' = f$.

Or sur]1 ; +∞[$f(x) = (x-1)e^{1-x}$ >0 car $x - 1 > 0$ et $e^{1-x} > 0$ (car $e^X > 0$ pour tout réel X).

F est donc bien (strictement) croissante sur [1 ; + [; CQFD !

b. Pour tout réel x appartenant à [1 ; +∞[, $F(x) = -xe^{1-x} + 1$, à l'aide d'une intégration par parties :

Posons $\begin{cases} u(t) = t-1 \\ v(t) = -e^{1-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{1-t} \end{cases}$; Alors : $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x (t-1)e^{1-t}\,dt = \int_1^x u(t)v'(t)\,dt$;

Comme u et v sont dérivables sur [1 ; +∞[et que leurs dérivées y sont continues, la formule d'intégration par parties donne :

$$F(x) = \int_1^x u(t)v'(t)\,dt = \left[u(t)v(t)\right]_1^x - \int_1^x u'(t)v(t)\,dt = \left[-(t-1)e^{1-t}\right]_1^x - \int_1^x 1\times\left(-e^{1-t}\right)dt$$

$$= -(x-1)e^{1-x} - \left[e^{1-t}\right]_1^x = -(x-1)e^{1-x} - \left[e^{1-x} - 1\right] = -xe^{1-x} + \cancel{e^{1-x}} - \cancel{e^{1-x}} + 1 = -xe^{1-x} + 1 \text{ ; CQFD !}$$

c. Sur [1 ; +∞[, l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ est équivalente à l'équation $\ln(2x) + 1 = x$:

Ainsi, $F(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -xe^{1-x} + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = xe^{1-x} \underset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2x} = e^{1-x}$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2x}\right) = \ln\left(e^{1-x}\right) \underset{\substack{\ln\frac{1}{x} = -\ln x \\ \ln e^X = x}}{\Leftrightarrow} -\ln(2x) = 1 - x \Leftrightarrow \ln(2x) + 1 = x \text{ ; CQFD !}$$

2. Soit un réel a supérieur ou égal à 1.

On considère la partie D_a du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$.

- D_a sur le graphique : cf. figure.
- a tel que l'aire, en unités d'aires, de D_a, soit égale à $\frac{1}{2}$:

  f est positive sur [1 ; + [(cf. B.1.a.) donc sur [1 ; a] ; l'aire, en unités d'aires, de D_a, est donc égale à l'intégrale $\int_1^a f(t)\,dt = F(a)$;

  Donc l'aire de D_a, est égale à $\frac{1}{2}$ u.a. ∂ $F(a) = \frac{1}{2} \underbrace{\Leftrightarrow}_{B.1.c.} \ln(2a) + 1 = a \quad \Leftrightarrow g(a) = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{A.1.a.} a = \alpha$.