Polynésie

1. *Exercice 1 (5 points)*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Prérequis

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$ où a et b sont deux nombre réels.

On note $\overline{z}$ le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - ib$.

Questions

a. Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, et tout nombre complexe z, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

Partie B

On considère l'équation (E) : $z^4 = -4$ où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation (E) alors les nombres complexes $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de l'équation (E).

2. On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + i$.

a. Écrire le nombre complexe z_0 sous forme exponentielle.

b. Vérifier que z_0 est solution de l'équation (E).

3. Déduire des deux questions précédentes trois autres solutions de l'équation (E).

Partie C

Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives : $z_A = 1+i$; $z_B = -1+i$; $z_C = -1-i$ et $z_D = 1-i$.

Soit r la rotation du plan de centre C et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{3}$. On appelle E l'image du point B par r et F celle du point D par r.

1. Déterminer l'écriture complexe de la rotation r.

2. a. Démontrer que l'affixe du point E, notée z_E, est égale à $-1+\sqrt{3}$.

b. Déterminer l'affixe z_F du point F.

c. Démontrer que le quotient $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un nombre réel.

d. Que peut-on en déduire pour les points A, E et F ?

2. *Exercice 2 (3 points)*

Des robots se trouvent au centre de gravité O d'un triangle de sommets S, I et X.

Chacun se déplace en trois étapes successives de la manière suivante :

- à chaque étape il passe par l'un des trois sommets S, I et X puis il rejoint le point O ;
- les robots sont programmés de telle sorte que, lors d'une étape, la probabilité de passer par le sommet S est égale à celle de passer par le sommet X et la probabilité de passer par le sommet S est le double de celle de passer par le sommet I ;
- les différentes étapes sont indépendantes les unes des autres ;
- on ne tient pas compte des passages par O.

Partie A – Un seul robot

Un seul robot se trouve au point O.

1. Démontrer qu'à chaque étape, la probabilité que le robot passe par le sommet I est égale à $\frac{1}{5}$.

2. On note E l'événement : « au cours des trois étapes, le robot passe successivement par les 3 sommets S, I et X dans cet ordre ».

Démontrer que la probabilité de E est égale à $\frac{4}{125}$.

3. On note F l'événement : « au cours des trois étapes, le robot passe exactement par les 3 sommets S, I et X dans un ordre quelconque ».
Déterminer que la probabilité de F.

Partie B – Plusieurs robots

Des robots se trouvent au point O, leurs déplacements étant indépendants les uns des autres.

Quel nombre minimal n de robots doit-il y avoir pour que la probabilité de l'événement : « au moins l'un des robots passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre » soit supérieure ou égale à 0,99 ?

3. Exercice 3 (5 points, non spécialistes)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère :

- les points $A(1\,;1\,;1)$ et $B(3\,;2\,;0)$;
- le plan (P) passant par le point B et admettant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal ;
- le plan (Q) d'équation : $x-y+2z+4=0$;
- la sphère (S) de centre A et de rayon AB.

1. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) est : $2x+y-z-8=0$.

2. Déterminer une équation de la sphère (S).

3. a. Calculer la distance du point A au plan (Q). En déduire que le plan (Q) est tangent à la sphère (S).

b. Le plan (P) est-il tangent à la sphère (S) ?

4. On admet que le projeté orthogonal de A sur le plan (Q), noté C, a pour coordonnées $(0\,;2\,;-1)$.

a. Prouver que les plans (P) et (Q) sont sécants.

b. Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et (Q).

Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est : $\begin{cases} x=t \\ y=12-5t \\ z=4-3t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

c. Vérifier que le point A n'appartient pas à la droite (D).

d. On appelle (R) le plan défini par le point A et la droite (D). L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

« Tout point du plan (R) est équidistant des points B et C ».

Justifier votre réponse.

4. Exercice 3 (5 points, spécialistes)

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation (E) : $7x-6y=1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation (E).

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation : $7n-3\times 2^m=1$ (F).

1. On suppose $m\le 4$. Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.

2. On suppose maintenant que $m \geq 5$.

a. Montrer que si le couple *(n, m)* vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1(\text{modulo } 32)$.

b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple (*n, m*) vérifie la relation (F) alors *n* est divisible par 4.

c. En déduire que si le couple (*n*, *m*) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1(\text{modulo } 5)$.

d. Pour $m \geq 5$, existe-t-il des couples (*n, m*) d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?

3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

5. Exercice 4 (7 points)

La figure qui suit l'exercice sera complétée.

Partie A

1. On considère la fonction *g* définie sur $[1\,;+\infty[$ par $g(x) = \ln(2x) + 1 - x$.

a. *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[1\,;+\infty[$ une unique solution notée α.

b. Démontrer que $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel *n*, par $u_{n+1} = \ln(2u_n + 1)$.

On désigne par (C) la courbe d'équation $y = \ln(2x) + 1$ dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$. Cette courbe est donnée ci-dessous.

a. En utilisant la courbe (C), construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite.

b. Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

c. Démontrer que la suite (u_n) converge vers α.

Partie B

On considère la fonction *f* définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = (x-1)e^{1-x}$.

On désigne par (H) la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$. Cette courbe est donnée ci-dessous.

1. Pour tout nombre réel *x* supérieur ou égal à 1, on pose : $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x (t-1)e^{1-t}\,dt$.

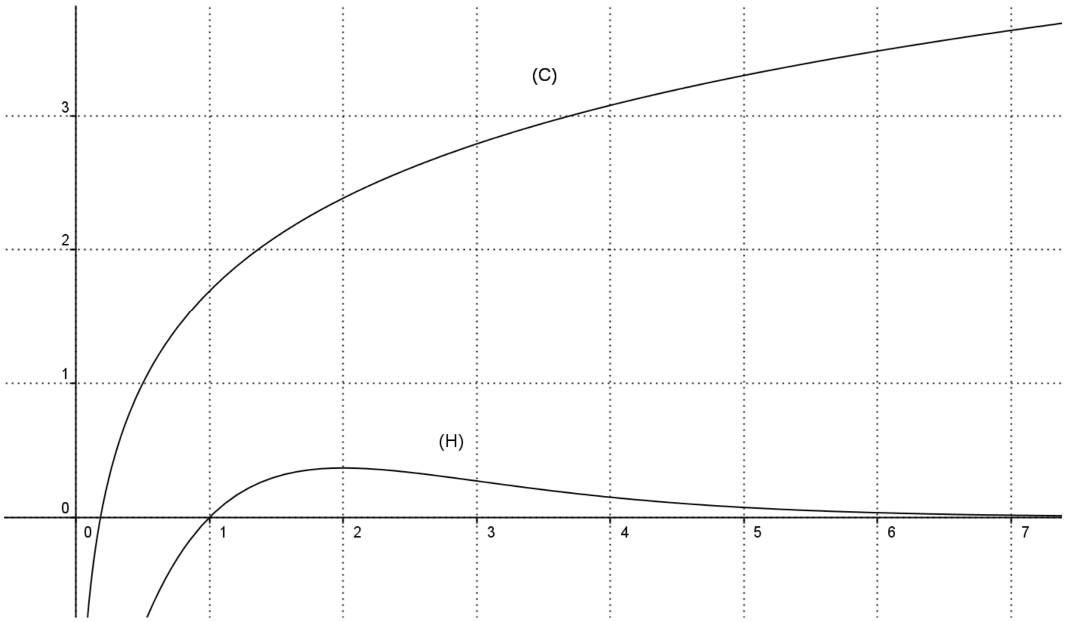
a. Démontrer que la fonction *F* est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout réel *x* appartenant à $[1\,;+\infty[$, $F(x) = -xe^{1-x} + 1$.

c. Démontrer que sur $[1\,;+\infty[$, l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ est équivalente à l'équation ln(2*x*) + 1 = *x*.

2. Soit un réel *a* supérieur ou égal à 1. On considère la partie D_a du plan limitée par la courbe (H), l'axe des abscisses et les droites d'équation *x*= 1 et *x* = *a*.

Déterminer *a* tel que l'aire, en unités d'aires, de D_a, soit égale à $\frac{1}{2}$ et hachurer D_a sur le graphique.


(C)
(H)
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5
6
7