La Réunion

1. Distance point-droite, La Réunion sept. 2010, 5pts

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les plans P et Q d'équations respectives : $x + y + z = 0$ et $2x + 3y + z - 4 = 0$.

1. Montrer que l'intersection des plans P et Q est la droite D dont une représentation paramétrique est :

$\begin{cases} x=-4-2t \\ y=4+t \\ z=t \end{cases}$ où t est un nombre réel.

2. Soit λ un nombre réel.

On considère le plan P_λ d'équation : $(1-\lambda)(x+y+z)+\lambda(2x+3y+z-4)=0$.

a. Vérifier que le vecteur $\vec{n}(1+\lambda\,;1+2\lambda\,;1)$ est un vecteur normal du plan P_λ.

b. Donner une valeur du nombre réel λ pour laquelle les plans P et P_λ sont confondus.

c. Existe-t-il un nombre réel λ pour lequel les plans P et P_λ sont perpendiculaires ?

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D', intersection des plans P et P_{-1}.
Montrer que les droites D et D' sont confondues.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
On considère le point $A(1\,;\,1\,;\,1)$.
Déterminer la distance du point A à la droite D, c'est-à-dire la distance entre le point A et son projeté orthogonal sur la droite D.

<u>Correction</u>

1. $M(x,y,z)\in P\cap Q \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+3y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-t \\ 2x+3y=4-t \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-t \\ -2y-2t+3y=4-t \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4-2t \\ y=4+t \\ z=t \end{cases}$.

Ce sont bien les équations paramétriques d'une droite D contenant le point $(-4\,;\,4\,;\,0)$ en posant $t=0$, et de vecteur directeur $(-2\,;\,1\,;\,1)$.

2. a. On développe et on regroupe suivant les variables :

$$(1-\lambda)(x+y+z)+\lambda(2x+3y+z-4)=0 \Leftrightarrow (1-\lambda+2\lambda)x+(1-\lambda+3\lambda)y+(1-\lambda+\lambda)z-4\lambda=0$$
$$\Leftrightarrow (1+\lambda)x+(1+2\lambda)y+z-4\lambda=0,$$

dont un vecteur normal est $\vec{n}(1+\lambda\,;1+2\lambda\,;1)$.

b. Les plans P et P_λ sont confondus si et seulement si les coefficients de leurs équations sont proportionnels, soit : $\frac{1+\lambda}{1}=\frac{1+2\lambda}{1}=\frac{1}{1}$, ce qui conduit à $\lambda=0$.

c. Un vecteur normal au plan P est $\vec{p}=(1\,;1\,;1)$. P et P_λ sont perpendiculaires si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux, soit $\vec{n}.\vec{p}=0 \Leftrightarrow 1+\lambda+1+2\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$.

3. Le plan P_{-1} d'équation $-y+z+4=0$ est perpendiculaire au plan P.

Comme à la question 1. il faut résoudre le système : $\begin{cases} x+y+z=0 \\ -y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-t \\ y=4+t \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4-2t \\ y=4+t \\ z=t \end{cases}$, ce qui redonne D.

4. Soit H et K les projeté orthogonaux de A respectivement sur P et P_{-1} ; soit I le projeté orthogonal de A sur *D*. Les points A, H, K et I sont coplanaires : ils appartiennent au plan perpendiculaire à P et P_{-1} contenant A. (AH) et (AK) perpendiculaires à deux plans perpendiculaires sont perpendiculaires.

Le quadrilatère AHIK est donc un rectangle.

On a $d(A, P) = AH = \dfrac{|1+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ et $d(A, P_{-1}) = AK = \dfrac{|-1+1+4|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. D'après le théorème de Pythagore : $AI^2 = AH^2 + AK^2 = 3+8 = 11 \Rightarrow d(A, D) = \sqrt{11}$.

Autre méthode : Soit *M* un point de D,

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + \ldots} = \sqrt{(-4-2t-1)^2 + (4+t-1)^2 + (t-1)^2} = \sqrt{(-5-2t)^2 + (3+t)^2 + (t-1)^2} = f(t).$$

Dérivons : $f'(t) = \dfrac{-4(-5-2t)+2(3+t)+2(t-1)}{\sqrt{\ldots}} = \dfrac{12t+24}{\sqrt{\ldots}}$ s'annule pour $t=-2$; la distance est minimale pour $M(0\,;2\,;-2)$ et vaut $f(-2) = \sqrt{11}$.

2. Exercice 2 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question et la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

Dans une fête foraine, Luc décide de participer à un jeu qui se déroule de la manière suivante :

Luc tire au hasard un jeton dans une urne contenant quatre jetons rouges et deux jetons bleus.

- Si le jeton tiré est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, sans remettre dans l'urne le premier jeton tiré, il tire au hasard un deuxième jeton dans l'urne.
- Si le deuxième jeton tiré est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, sans remettre dans l'urne les deux jetons précédents, il tire au hasard un troisième jeton dans l'urne.
- Si le troisième jeton est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, le jeu s'arrête et Luc a perdu.

1. La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du deuxième tirage est :

$\frac{19}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{4}{15}$

2. La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du troisième tirage est :

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{9}$

3. La probabilité que Luc gagne à ce jeu après avoir effectué au moins deux tirages est :

$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{3}$

4. La probabilité que Luc gagne à ce jeu, sachant qu'il a obtenu un jeton rouge au premier tirage est :

$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{15}$ f	$\frac{11}{15}$	$\frac{5}{9}$

3. Exercice 3 (6 points)

Pour tout nombre réel *k* strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$f_k(x) = \ln(x) - kx^2 + 1.$$

Partie A

1. Déterminer la limite de la fonction f_k en 0.

2. On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$. En déduire la limite de la fonction f_k en $+\infty$.

3. Montrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, $f_k'(x) = \frac{1-2kx^2}{x}$.

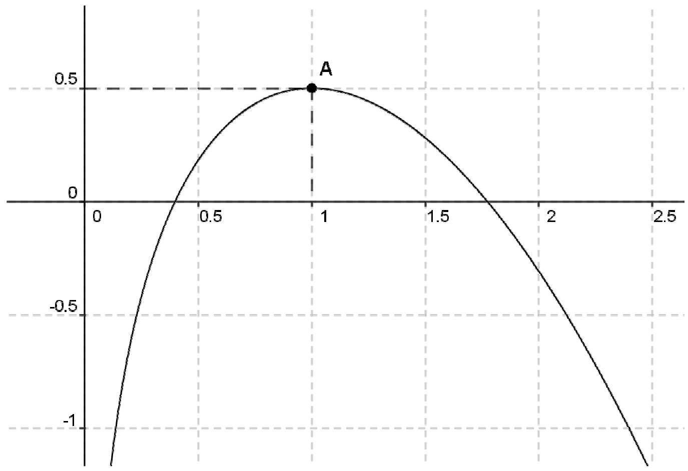
4. Pour un nombre réel k strictement positif on donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f_k.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2k}}$		$+\infty$
$f(x)$	‖	↗	$\frac{1-\ln(2k)}{2}$	↘	

Justifier les renseignements sur les variations de la fonction f_k figurant dans ce tableau.

5. On a tracé ci-dessous la courbe C_k représentative d'une fonction f_k pour une certaine valeur du nombre réel k strictement positif. Le point $A\left(1\,;\frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe C_k.

Quelle est la valeur du nombre réel k correspondant ? Justifier la démarche.



Partie B

Dans cette partie on pose $k = \frac{1}{2}$.

1. Calculer $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln(x)\,dx$. On pourra utiliser une intégration par parties.

2. Calculer, en unité d'aire, la mesure de l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction $f_{1/2}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$.

<u>Correction</u>

$f_k(x) = \ln(x) - kx^2 + 1$.

Partie A

1. En 0 ln tend vers $-\infty$ donc f_k également.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\frac{\ln x}{x}=0\times 0=0$. En mettant x^2 en facteur, on a $f_k(x)=x^2\left(\frac{\ln(x)}{x^2}-k+\frac{1}{x^2}\right)$: en $+\infty$ l'intérieur de la parenthèse tend vers $-k$; x^2 tend vers $+\infty$; f_k tend donc vers $-\infty$.

3. $f_k'(x)=\frac{1}{x}-2kx=\frac{1-2kx^2}{x}$.

4.

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2k}}$	$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$ ↗	$\frac{1-\ln(2k)}{2}$	↘

$f_k'(x)=\frac{1-2kx^2}{x}\geq 0\Leftrightarrow\frac{\left(1-x\sqrt{2k}\right)\left(1+x\sqrt{2k}\right)}{x}\geq 0$; seul le terme $1-x\sqrt{2k}$ change de signe en $1/\sqrt{2k}$, positif avant, négatif après. En 0 la fonction n'est pas définie à cause de ln.

5. On doit avoir $f_k(1)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\ln(1)-k+1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$.

Partie B

1. On pose $\begin{array}{l}u'=1\\ v=\ln x\end{array}$ d'où $\begin{array}{l}u=x\\ v'=\frac{1}{x}\end{array}$, soit

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ln(x)\,dx=\left[x\ln x\right]_{1/2}^{1}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}x\frac{1}{x}\,dx=0-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}.$$

2. $\int_{\frac{1}{2}}^{1}f_{1/2}(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}+\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{3}x^3+x\right]_{1/2}^{1}=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}+-\frac{1}{2}\frac{1}{3}+1+\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{7}{48}\approx 0,2$.

4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 4 centimètres.

On considère la transformation *f* du plan qui, à tout point *M* d'affixe *z*, associe le point *M'* d'affixe *z'* telle que $z'=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)z$.

1. Montrer que la transformation *f* est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

2. On définit la suite de points (M_n) de la façon suivante : M_0 est le point d'affixe $z_0=1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $M_{n+1}=f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

a. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $z_n=e^{\frac{i3n\pi}{4}}$.

b. Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

c. Montrer que pour tout nombre entier naturel n, les points M_n et M_{n+8} sont confondus.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Prouver que les triangles $M_0M_1M_2$ et $M_7M_0M_1$ ont la même aire. Préciser la valeur exacte de cette aire.

5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 8 centimètres.

On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=\frac{\sqrt{2}}{4}(-1+i)z$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.

2. On définit la suite de points (M_n) de la façon suivante : M_0 est le point d'affixe $z_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $M_{n+1}=f(M_n)$.On note z_n l'affixe du point M_n.

a. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $z_n=\frac{1}{2^n}e^{\frac{i3n\pi}{4}}$.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soient n et p deux entiers naturels. À quelle condition sur n et p les points M_n et M_p sont-ils alignés avec l'origine O du repère ?